Digitized by Google

4° A. gr. b. 145

Archimedes

Bibliotheca Palatina

<36625218670012

<36625218670012

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

Digitized by Google

Ip. 521A

Auct. Gr. Vet. 127. p. 570.

ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII SPHÆRICA:

METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER
Is. B*ARROW*, Exprofeſſorem *Lucaſianum* CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico
Little Britain. 1675.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

ARCHIMEDIS OPERA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Sōc. Regiæ Soc.

◆

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*,
in vico **Little-Britain.** 1675.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lectori.

Vetuſtos authores, ſcientiarum parentes, ab interitu ſalvos præſtari, poſterorum intereſſe videtur, nè ingrati audiant. Neque tametſi quæ continent pleraque novis artificiis vel promptiùs elici, vel conciſiùs aſtrui poſſint, fructu penitus deſtituitur illorum lectio. Nam amænum imprimìs videtur quibus à fundamentis tantum in faſtigium evectæ ſunt ſcientiæ diſpicere; tum haud inutile fuerit deguſtare fontes, è quibus cuncta fermè recentiorum inventa dimanârunt; iſtorum quippe perquam ingenioſas atque ſubtiles perſequendo vel æmulando methodos horum emicuit induſtria. Porrò ſincerum demon-

ſtrandi guſtum ac peritiam non aliunde quis opinor feliciùs hauſerit, quàm ex iis, quorum in theorematis deducendis præcipuæ relucent ſolertia ac elegantia; quas ut nemo tranſgredi poſſit, ità vix aſſequi quiſquam valeat ab illorum Scriptis peregrinus: Ut taceam, cùm à poſteris hæc ſcripta ſuis firmandis præſternantur, allegentúrque paſſim, illorum referre qui hæc ſtudia tractant, ea præſtò ad manum, nè dicam ad unguem, habere: Id ut promptè tibi ſuccedat, & quàm exiguo impendio, præſtitura videtur hæc editio; ſaltem præ illis, quæ enormi juxta mole ſpiſſæ ac pretio caræ hactenus proſtant; ſin hæc nihilominus diſpliceat, det ille quæſo tibi pœnas, qui amicitiâ præpotenter abuſus, me nequicquam reclamante, protruſit hæc crepundia, luci publicæ minimè nata vel debita. Vale.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

Atqui eos ſpiritus Archimedes, *eam altitudinem ingenii, tantáſque præceptorum divitias tenuit, ut quum per ea nomen atque opinionem ſibi paraviſſet non humanæ ſed divinæ ſcientiæ, nullum de his relinquere commentarium ſuſtinuerit: verùm illa in parandis machinamentis induſtria, atque adeo omni quæ ad uſum ſe applicaret, & ad utilitatem, arte pro humili & ſordida repudiata, in iis tantùm poſuerit ſtudium ſuum, quæ præclara & eximia per ſe, neque ulli adſtricta neceſſitati eſſent, non conferenda quidem cum aliis, ſed quæ certamen excitent cum materia demonſtrationi, quum illa mole & ſpecie, exquiſita hæc certitudine & vi excellat incredibili: neque enim implicatiores in geometria & contortas magis quæſtiones, in ſimplicioribus liquidioribúſque conſcriptas elementis invenias. Id dexteritati illius ingenij alij attribuunt: alij ad laborem referendum putant potius indefatigatum, quo quidvis eum efficere veriſimile ſit facilè & citra ſudorem potuiſſe. Nam ſi quæras, per te non invenias demonſtrationem illius quæſtionum: Ubi didiceris, potuiſſe putes te eam vel tua ſponte invenire, adeo ſtrata eſt via atque expedita, quæ ad id quod intendit demonſtrare perducit. Quare non ſunt rejicienda illa quæ de eo feruntur, à ſua quadam & familiari* Archimedem *perpetuò demulcitum Sirene, & cibi obliviſci & corporis curam relinquere ſolitum: quúmque raperetur ſubinde invitus ad ungendum corpus & ad balneum in foco figuras geometricas exarare: & dum ungeretur, ducere digito lineas, tanta illum dulcedine artis captum & revera inflammatum fuiſſe. Quum autem multa, & præclara inveniſſet, dicitur ab amicis & propinquis petiſſe ut vita defuncti cylindrum ſphæram complectentem ſepulcro imponerent, inſcriberéntque proportionem, quatenus ſolidum continens excedat contentum. Atque is* Archimedes *quum eſſet, invictum ſe urbémque, quantum in ipſo eſſet, præſtitit.*

Digitized by Google

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

ΤΗλικοῦτον μέντοι φρόνημα ϗ βάθος ψυχῆς, καὶ τοσοῦτον ἐκέκτητο θεωρημάτων πλοῦτον Ἀρχιμήδης, ὥστε ἐφ' οἷς ὄνομα ϗ δόξαν οὐκ ἀνθρωπίνης ἀλλὰ δαιμονίου τινὸς ἔσχε συνέσεως, μηθὲν ἐθελῆσαι σύγγραμμα, περὶ τούτων ἀπολιπεῖν, ἀλλὰ τὴν περὶ τὰ μηχανικὰ πραγματείαν ϗ πᾶσαν ὅλως τέχνην χρείας ἐφαπτομένην, ἀγεννῆ ϗ βάναυσον ἡγησάμενος, ἐκεῖνα καταθέσθαι μόνα τὴν αὐτοῦ φιλοτιμίαν, οἷς τὸ καλὸν καὶ περιττὸν ἀμιγὲς τοῦ ἀναγκαίου πρόσεστιν, ἀσύγκριτα μὲν ὄντα τοῖς ἄλλοις, ἔριν δὲ παρέχοντα πρὸς τὴν ὕλην τῇ ἀποδείξει, τῆς μὲν τὸ μέγεθος ϗ τὸ κάλλος, τῆς δὲ τὴν ἀκρίβειαν καὶ τὴν δύναμιν ὑπερφυῆ παρεχομένης. οὐ γὰρ ἔστιν ἐν γεωμετρίᾳ χαλεπωτέρας ϗ βαρυτέρας ὑποθέσεις ἐν ἁπλουστέραις λαβεῖν ϗ καθαρωτέραις στοιχείοις γραφομένας. ϗ τοῦθ' οἱ μὲν εὐφυΐᾳ τοῦ ἀνδρὸς προσάπτουσιν, οἱ δὲ ὑπερβολῇ τινι πόνου νομίζουσιν, ἀπόνως πεποιημένῳ ϗ ῥᾳδίως ἕκαστον ἐοικὸς γεγονέναι. ζητῶν μὲν γὰρ οὐκ ἄν τις εὕροι δι' αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, ἅμα δὲ τῇ μαθήσει παρίσταται δόξα τοῦ κἂν αὐτὸν εὑρεῖν, οὕτω λείαν ὁδὸν ἄγει ϗ ταχεῖαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. οὔκουν οὐδὲ ἀπιστῆσαι τοῖς περὶ αὐτοῦ λεγομένοις ἔστιν, ὡς ὑπ' οἰκείας δή τινος ϗ συνοίκου θελγόμενος ἀεὶ σειρῆνος, ἐλέληστο ϗ σίτου καὶ θεραπείας σώματος ἐξέλειπεν· βίᾳ δὲ πολλάκις ἑλκόμενος ἐπ' ἄλειμμα ϗ λουτρὸν, ἐν ταῖς ἐσχάραις ἔγραφεν σχήματα τῶν γεωμετρικῶν, καὶ τοῦ σώματος ἀληλειμμένου διῆγε τῷ δακτύλῳ γραμμάς, ὑπὸ ἡδονῆς μεγάλης κάτοχος ὢν ϗ μουσόληπτος ἀληθῶς. πολλῶν δὲ ϗ καλῶν εὑρετὴς γεγονὼς λέγεται τῶν φίλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν, ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσιν τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖραν ἐντὸς κύλινδρον ἐπιγράψαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν τοιοῦτος γενόμενος ἀήττητον ἑαυτόν τε καὶ τὴν πόλιν ὅσον ἐφ' ἑαυτῷ διεφύλαξεν.

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

$A + B$, *hoc eſt*	A *&* B *ſimul accepta.*
$A - B$,	A, *demptâ* B.
$A -: B$,	*differentia ipſarum* A, *&* B.
$A \times B$,	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$,	A *æquatur ipſi* B.
$A \sqsubset B$,	A *major eſt quàm* B.
$A \sqsupset B$,	A *minor eſt quàm* B.
$A . B :: C . D$,	A *ad* B *eandem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A, B, C, D ∺,	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$,	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$,	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D \begin{matrix} = \\ \sqsubset \\ \sqsupset \end{matrix}$	M.N. *Rationes* A ad B, *&* C ad D *compoſita* $\left\{\begin{matrix}\textit{adæquant}\\ \textit{excedunt}\\ \textit{deficiunt à}\end{matrix}\right\}$ *ratione* M ad N.
Aq,	*Quadratum ex* A.
$\sqrt{A}$,	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac,	*Cubus ex* A.
$\sqrt{Aq + Bq}$,	*Latus compoſiti ex* Aq *&* Bq.

Reliquas, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præſertim in analyſi tantillùm verſatus.

ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA & CYLINDRO
LIBER PRIMUS.

Archimedes Doſitheo Salutem.

ANtea quidem miſi quæ contemplando invenimus, ipſorum adſcribentes Demonſtrationes; veluti *quòd omnis portio comprehenſa ſub recta linea, & rectanguli Coni ſectione ſeſquitertia eſt trianguli habentis eandem baſim ac portio, æqualemque altitudinem.* Jam quorundam incidentium Theorematum elaboravimus Demonſtrationes, quæ ſunt hujuſmodi. Primò quidem *quòd Sphæræ ſuperficies quadrupla ſit maximi circuli eorum qui in ipſa ſunt.* Secundum verò *quòd cujuſque portionis ſphæræ ſuperficiei æqualis eſt circulus, cujus radius æquatur rectæ à vertice portionis ductæ ad peripheriam circuli, qui baſis eſt portionis:* adhæc, *quòd omnis ſphæræ cylindrus, baſin quidem habens eandem maximo, eorum qui in ſphæra ſunt, circulo, altitudinem verò parem diametro ſphæræ, cùm ipſe ſphæræ ſeſquialter ſit, tum ſuperficies ejus ſuperficiei ſphæræ ſeſquialtera.* Hæc quidem natura præceſſerant circa dictas figuras demonſtranda, nec tamen ab iis, qui ante nos Geometriæ incubuerunt animadverſa ſunt; ut intelliget quiſquis circa has figuras propoſita theoremata cum demonſtrationibus contulerit. * Sicut & recepta multa eorum, quæ *Eudoxus* circa Solida ſpeculatus eſt; veluti *quòd omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis baſim habentis eandem cum pyra-*

Peſſimè depravatus locus: lego, ταῦτα μὲν τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· οὐ μὲν οἱ γέγονεν ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεσκεμμένων τεθεωρημένα, καὶ νοήσεται ὁ αὐ--

* pro καὶ ὡς lego ὥσπερ.

Digitized by Google

mide, & parem altitudinem: quodque conus omnis ſubtriplus eſt Cylindri baſin habentis eandem cum Cono, ac æqualem altitudinem: quippe cùm etiam hæc ex natura rei priùs ineſſent hiſce figuris, etſi complures ante *Eudoxum* fuerant haud contemnendi Geometræ, contigit tamen ea ab omnibus ignorata fuiſſe, neque perſpecta à quoquam. Licebit autem illis, qui poterint, circa hæc diſpicere. Ex uſu quidem fuiſſet & vellem hæc, adhuc ſuperſtite *Conone*, edita fuiſſe: hunc enim arbitramur imprimis idoneum fuiſſe hæc expendere, & appoſitam de iis ſententiam proferre; bonum factum verò cenſentes etiam * aliis Mathematum *ſtudioſis & peritis* impertire, mittimus tibi Demonſtrationes adſcribentes, de quibus fas erit iis, qui in Mathematicis verſantur, diſpicere. Vale.

Pro τὸ πάντων εἰδέναι *lego* ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι.

Pro τῆνυν *lego* τῆνον.

Pro αὐτοῖς *lego* ἄλλοις.

ADſcribuntur primò tam Axiomata quàm Adſumpta ad demonſtrationes ipſorum.

Definitiones & Hypotheſes.

I. Sunt quædam in plano lineæ curvæ terminatæ, quæ illarum terminos conjungentium rectarum vel totæ, ad eaſdem partes ſunt, vel nihil habent ad alteras.

Scholium.

Lineæ curvæ (vel flexæ, καμπύλης γραμμῆς) nomine deſignatur non tantùm linea ubique continuóque curva, ſed & quomodocunque inflexa; ſeu mixta è rectis & curvis, ſeu tota è rectis compoſita. Quomodo perimeter figuræ cujuſvis rectilineæ, vel ejus quæcunque pars angulum includens, eſt linea καμπύλη. Siquidem rectè *Eutocius.* Ἴδιον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικὰς ἢ κωνικὰς, ἢ ἀκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν καμπύλην ὀνομάζει, μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται &c. Hujuſmodi verò curvarum aliquas adſumit vel totas ad eaſdem rectarum, quæ terminos ipſarum connectunt, partes jacere, vel ſaltem nihil ad diverſas ſitum habere. Sit exemplo peripheria circularis A B C, cujus terminos connectat recta A C, liquet totam lineam A B C ſupra rectam A C attolli ad partes B.

Fig. 1.

B. Sin accipiatur in chorda A C punctum D, lineæ mixtæ D A B C pars quidem aliqua A B C versùs partes B ſupra C D (terminos D, C connectentem) jacet, alia pars A D ſecundum ipſam C D protractam (κατ' αὐτὴν in ſequenti definitione, hoc eſt ita ut ei congruat) ſita eſt, nulla verò pars intra C D, ad partes ipſi B contrarias, deprimitur.

II. Ad eaſdem verò partes cavam appello ejuſmodi lineam, in qua * ſumptis utcunque duobus punctis, quæ iis interjacent rectæ vel omnes ad eaſdem lineæ partes cadunt, vel aliquæ quidem ad eaſdem, quædam verò ſecundùm *ipſam, ſed ad diverſas nulla.

* *lego* ἂν (*expletivum*) *pro* ἐάν.
* *aut*, ſupra ipſam.

Schol. Huic intelligendæ ſubobſcuræ definitioni reſpiciatur & expendatur antecedentis huic præſtructæ hypotheſis explicatio; cui tantùm adjiciam certum eſſe cavitatis in eaſdem partes continuatæ ſignum, ſi nulla recta lineam pluribus quàm duobus punctis ſecet.

III. Haud abſimiliter ſunt quædam ſuperficies terminatæ, non quidem ipſæ in plano, ſed terminos *habentes (ſuos) in plano; & plani in quo terminos habent, vel totæ ad eaſdem partes ſunt, vel nihil habent ad alias.

* *lego* ἔχουσαι *pro* ἔχουσιν.

IV. In eaſdem verò cavas ejuſmodi voco ſuperficies, in quibus ſi duo ſumantur puncta, quæ punctis interjacent rectæ vel omnes ad eaſdem ſuperficiei partes cadunt, vel quædam ad eaſdem, quædam verò ſecundùm illas, in diverſas autem nulla.

Schol. Qui primas duas capit, has intelliget hypotheſes nullo negotio.

V. *Sectorem verò ſolidum* appello, quando ſphæram conus ſecat verticem habens ad centrum ſphæræ, comprehenſam figuram tum à coni ſuperficie, tum à ſuperficie ſphæræ intra conum.

Ut ſi B A C ſit conus, cujus vertex A centrum ſphæræ; figura D A E contenta ſuperficie conicâ D A E, & ſphæricâ ſuperficie D E, erit ſector ſolidus. Fig. 2.

Fit verò ſector ſolidus D A E ex rotatu ſectoris circularis D A Z circa radium A Z; poſito arcu D Z = Z E. unde aliter definiri poſſit. Nota, quòd detracto ſectore D A E, reſiduum è ſphæra D X E ſubinde καταχρηστικῶς dicatur Sector ſphæricus, hemiſpherio major. *vid. ſchol. 51. hujus.*

VI. *Rhombum verò ſolidum* voco, quando duo coni eandem baſim habentes vertices habent ad utramque partem plani baſis, ita ut ipſorum axes in directum jaceant, ab ambobus conis compoſitam figuram ſolidam.

Talis eſt figura B A C D conſtans duobus conis B A C, B D C, quorum communis baſis eſt circulus B C, & axis A D tranſiens per centrum E. Fig. 3.

Hæc autem adſumo.

Axiomata.

I. Linearum eoſdem terminos habentium minimam eſſe rectam,

II. Alias verò lineas ſi in eodem plano exiſtentes eoſdem terminos habeant, inæquales eſſe; quando ſcilicet ambæ ad eaſdem partes cavæ ſunt, & vel una tota comprehenditur ab *altera, & à recta eoſdem cum illa terminos habente, vel aliqua comprehenduntur, aliqua verò communia habet: & minorem eſſe illam quæ comprehenditur.

* *dele* ἐπιφανείας.

Fig. 4.

Sint exemplo lineæ A C B, A D E B, hiſce conditionibus præditæ; quòd nempe ſunt in eodem plano, & eoſdem terminos A,B habent, & ad eaſdem partes cavæ ſunt; & A C B tota comprehenditur ab A D E B & recta A B, erit A C B minor quàm A D E B. Item, linea mixta Z A C B minor eſt lineâ Z A D E B, quia Z A communis eſt, & reliqua A C B comprehenditur ab A D E B, ut priùs.

Hoc pronunciatum ab Editoribus hactenus acceptum eſt peſſimè; in duo quippe diſcerpunt, unum veritate, alterum & ſenſu caſſum. Vide *Rivaltum*, & ſtupe.

III. Similiter & ſuperficierum eoſdem terminos habentium, ſi in plano terminos habeant, minorem eſſe quæ plana eſt.

IV. Alias verò ſuperficies etiam eoſdem terminos habentes, ſi in plano ſint termini, inæquales eſſe, modò ſint ambæ ad eaſdem partes cavæ, & vel una ſuperficies tota comprehenditur ab altera, & a ſuperficie eoſdem cum ipſa terminos habente, vel aliquæ (partes) comprehenduntur, aliquas verò communes habet: & majorem eſſe illam, quæ comprehenditur.

Itidem & hoc Axioma perquam ineptè & abſurdè diſpertitur in duo. Cæterùm ſi ſecundum probè perceperis, etiam hoc facilè aſſequeris. Lucem fœnerabunt quæ infrà ſæpiùs occurrent Exempla.

V. Quinetiam inæqualium linearum & inæqualium ſuperficierum, ac inæqualium ſolidorum *majus excedere minus eo quod ſibi (aliquoties) adjunctum ſuperare poſſit deſignatum quodvis * ad ſe rationem habens.

Ut ſi linea A C lineam A B exſuperet lineâ B C, linea B C toties accipi poteſt (ſeu taliter multiplicari) ut quamvis lineam (puta Z C) excedat. Sequitur ex *def. V. Elementi V.

* *lego* μεῖζον *pro* μεταξύ.

**vel* ſibi homogeneum; *vel* eorum quæ comparari poſſunt.

* *vel* IV.

Hiſce ſuppoſitis,

Prop.

* *Prop. I.*

* *Perperam vulgò pronunciatis accenſetur.*

Si circulo (A D F) *inſcribatur polygonum* (A B C D E F) *liquet inſcripti polygoni perimetrum minorem eſſe circuli peripheriâ.*

Nam ſingulum latus, ut A B, minus eſt arcu (A B) quem ſubtendit; & conſequenter ſimul omnia latera arcubus ſimul omnibus minora ſunt, hoc eſt tota perimeter polygoni totâ circuli peripheriâ. Fig. 5. *2 ax. hujus.*

Coroll. 1. Eâdem planè ratione quomodocunque diviſo arcu quolibet (A D) & ductis ſubtenſis (A B, B C, C D); totus arcus omnibus ſubtenſis major eſt.

Coroll. 2. Sinus rectus arcu ſuo minor eſt, hoc eſt à centro Z ductâ Z Y X ad A B perpendiculari, eſt A Y $\sqsupset$ arc A X.

Nam A Y B (2 A Y) $\sqsupset$ A X B (2 A X).

Prop. II.

Si circa circulum (ABCDE) *deſcribatur polygonum* (MNOPQ), *polygoni circumſcripti perimeter circuli perimetro major erit.* Fig. 6.

Nam linea compoſita A M + B M major eſt arcu A B, & B N + C N major arcu B C; ac ita de cæteris: quare tota circumſcriptæ figuræ perimeter, totâ circuli peripheriâ major eſt. *2 ax. huj.*

Corol. 1. Simili ratione quomodocunque diviſo arcu quovis, circumductæ tangentes arcu toto majores ſunt.

Corol. 2. Tangens arcu ſuo major eſt, nempe ductis Z A, Z M, eſt A M $\sqsubset$ A Y. Nam A M + B M (2 A M) $\sqsubset$ A Y B (2 A Y).

Prop. III.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A, B), *poſſibile eſt duas rectas inæquales invenire, ita ut major recta ad minorem habeat minorem rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B). Fig. 7.

Multiplicetur A − B, per numerum aliquem (puta N) donec producta magnitudo, quam voco X, exſuperet B. tum aſſumptâ quâvis rectâ R, ſit R. S :: 1. N :: A − B. X. Dico R + S, & S eſſe lineas quæſitas. Nam ob B $\sqsupset$ X, erit A − B. B. $\sqsubset$ (A − B. X ::) R. S. unde componendo erit A. B $\sqsubset$ R + S. S: *Q.E.F.* *5 ax. huj.* *conſtr.* 8. 5.

Prop.

Prop: IV.

Fig. 8. 9. *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus* (A, B) *& circulo* (CDEF), *poſito circulo polygonum inſcribi, aliudque circumſcribi, ita ut circumſcripti latus ad latus inſcripti minorem habeat rationem, quàm magnitudo major* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 1. 10. *el.* [a]Fiat O P. O Q :: A. B. & deſcripto ſuper O P ſemicirculo adaptetur O Q; & conjungatur P Q. tum [b] biſecetur circumferentia C D E F, & ejus ſemiſſis D C F, & hujus ſemiſſis C D, ac ita continuò, donec angulus D G K, ſemiſſis anguli D G H ſit æqualis angulo P O R ⊐ ang P O Q. pérque K ducatur tangens L M occurrens radiis G D, G H protractis in L, M; tum conjungatur D H. à biſectione liquet rectam L M latus eſſe polygoni circulo circumſcriptibilis, & D H latus polygoni inſcriptibilis. Jam ob angulos D G N, c *conſt.* R O Q [c] pares, & angulos G N D, O Q R rectos, erunt trigona 4. 6. & 8. 5. D G N, R O Q ſimilia. quare G D (G K). G N :: O R. O Q ⊐ 15. 5. O P. O Q. atqui G K. G N :: L K. D N :: L M. D H. ergo L M. D H ⊐ (O P. O Q [c] ⊐) A. B. *Q. E. F*

Prop. V.

Rurſus ſi fuerint duæ magnitudines inæquales, & ſector poteſt circa ſectorem polygonum deſcribi, & aliud inſcribi, ut latus circumſcripti ad inſcripti latus minorem habet rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

Eodem planè modo conficitur, quo antecedens.

Prop. VI.

Fig. 10. 11. *Dato circulo* (G) *biniſque magnitudinibus inæqualibus* (A, B), *circulo polygonum circumſcribere, & aliud inſcribere, ita ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem habeat rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 13. 6. c 4 *hujus.* [a]Fiat linea X. Z ⊐ A. B; & inter X ac Z reperiatur media proportionalis Y; [c] tum circulo dato inſcribatur polygonum, aliúdque circumſcribatur, ita ut hujus latus L M ad illius latus D H minorem habeat rationem, quàm X ad Y. Dico factum. Nam ratio L M ad d *cor.* 20. 6. D H duplicata [d] (hoc eſt ratio figuræ circumſcriptæ ad inſcriptam) minor eſt ratione X ad Y duplicatâ, hoc eſt ratione X ad Z; quæ minor eſt ratione A ad B. ergo factum. *conſt.*

Corollarium. Prop. VII.

Quin ſimiliter demonſtremus, quòd duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & ſectore, poſſit circa ſectorem polygonum deſcribi, & aliud ei ſimile inſcribi, ita ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem rationem habeat, quàm major magnitudo ad minorem.

Lemma. Prop. VIII.

Manifeſtum & hoc, quòd, ſi detur circulus vel ſector, & ſpatium aliquod, poſſint circulo vel ſectori polygona æquilatera inſcribendo, & adhuc continuò reliquis ſegmentis, ſupereſſe quædam ſegmenta circuli vel ſectoris, quæ minora ſint propoſito ſpatio.

* Hæc enim tradita ſunt in Elementis. * *vid.* 2. 12.

Prop. IX.

Eſt autem demonſtrandum quòd & circulo dato (vel ſectore) (A) *& ſpatio* (B) *poſſit circumſcribi polygonum circulo (vel ſectori),* * *ita ut relicta à circumſcriptione ſegmenta minora ſint dato ſpatio.* **hoc eſt exceſſus polygoni ſupra circulum.*

[a] Circulo figura circumſcribatur; quam voca C; & alia inſcribatur, quæ vocetur I, ſic ut $C.I \sqsupset A+B.A$. Dico factum. Nam ob $A \overset{b}{\sqsubset} I$; [c] erit $C.A \sqsupset (C.I \overset{d}{\sqsupset}) A+B.A$. unde dividendo $C-A.A \sqsupset B.A$. [e] adeóque $C-A \sqsupset B$. ergo factum.

a 6 *hujus.*
b 9. *ax.* 1.
c 8. 5.
d *conſt.*
e 10. 5.

Prop. X.

Si cono Iſoſceli (V A X B Y C Z) *inſcribatur pyramis* (V A B C) *æquilateram habens baſim* (A B C); *ſuperficies ejus, exceptâ baſe, æquatur triangulo* (M N O), *habenti quidem baſin* (NO) *æqualem perimetro baſis* (A B C), *altitudinem verò* (M N) *perpendiculari* (V D) *demiſſæ à vertice* (V) *ad baſis unum latus* (A B). Fig. 12. 13.

Nam ducantur V E, V F etiam lateribus B C, C A perpendiculares, & quia triangula A V B, B V C, C V A ſibi mutuò [a] æquilatera ſunt, *erunt perpendiculares V D, V E, V F inter ſe pares. ergo triangulum, cujus baſis æquatur ipſis A B, B C, C A ſimul acceptis, & altitudo a *hypoth.*

b 38. 1. altitudo uni perpendicularium V D, [b] æquatur triangulis A V B +
c *conſt.& hyp.* B V C + C V A; [c] hoc eſt triangulum M N O æquatur ſuperficiei pyramidis exceptâ baſe. *Q. E. D.*

Prop. XI.

Fig. 14. *Si circa conum Iſoſcelem* (V D E F) *deſcribatur pyramis* (VABC), *ſuperficies Pyramidis demptâ baſe, æquatur triangulo, habenti baſin æqualem perimetro baſis* A B C, *altitudinem verò coni lateri* (V D).

a 18. *def.* 11. Sit V Z axis coni, & à centro Z ad contactum D ducatur recta Z D;
b 18. 11. & ob V Z [a] rectam plano A B C, etiam triangulum V Z D plano
c 18. 3. A B C [b] rectum eſt: at verò tangens A D [c] perpendicularis eſt ipſi
d 4. *def.* 11. Z D (communi ſectioni planorum V Z D, A B C) [d] ergo A D per-
e 3. *def.* 11. pendicularis eſt plano V Z D, & [e] conſequenter lineæ V D; ergo V D (coni latus) eſt altitudo trianguli V A B. Eâdemque ratione coni latus eſt altitudo trianguli V A C, & omnium, quibus conſtat lateratis coni ſuperficies. [f] ergo triangulum, cujus baſis eſt A B + B C +
f 38. 1. C A, altitudo latus coni, [f] æquatur triangulis coni ſuperficiem conſtituentibus. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 15. *Si in coni Iſoſcelis* (V A B) *circulum* (A B C D) *qui baſis eſt coni inciderit recta* (C D) *ab ejus autem terminis ducantur rectæ* (C V, D V) *ad coni verticem* (V); *triangulum* (C V D) *ab incidente, & ad verticem ductis comprehenſum, minus eſt coni ſuperficie* (C A V B D) *ductis ad verticem interceptâ.*

Biſecetur arcus C A B D in E, & ducantur rectæ C E, D E, V E.
a 1. 6. liquétque triang C V E + D V E [a] ⊏ C V D; quia C E + D E
b 20. 1. [b] ⊏ C D, & altitudo communis eſt: ſit exceſſus X, primò (ſuppone) non minor ſegmentis C E, D E: & quia ſuperficies conica C V E +
c 3. *ax. huj.* ſegm. C E [c] major eſt incluſo triangulo C V E (communis enim terminus eſt ſubtenſa C E); & ſimiliter conica ſuperficies D V E + ſegm. D E ⊏ triang D V E, erit conjunctè conica ſuperf. C V D + ſegmenta C E, D E ⊏ triang C V E + D V E; magiſque conica ſu-
d *hyp.* perf. C V D + X ⊏ triang. C V E + D V E [d] = triang C V D + X. unde ſublato communi X erit con. ſuperf. C V D ⊏ triang C V D. Sin X minor ſit ſegmentis C E, D E biſecentur arcus C E, D E, &
e 8 *hujus.* ipſorum ſemiſſes, [e] donec reſidua ſegmenta C A, A E, D B, B E minora

nora ſint exceſſu X. túmque ductis rectis A C, A E, A V; B D, B E, B V; [c] erit ut priùs, con. ſuperf. C V A + ſegm C A ⊏ triang CVA. & con. ſuperf. A V E + ſegm A E ⊏ triang A V E; adeóque conjunctè con. ſuperf. C V E + ſegm. C A, A E ⊏ triang C V A + A V E; ⊏ triang C V E. Simili ratione con. ſuperf. D V E + ſegm. D B, B E ⊏ triang D V E; conjunctéque con. ſuperficies C A V B D + ſegm. C A, A E, D B, B E ⊏ triang C V E + DVE [d] = triang C V D + X. Unde cùm ſegm. C A + A E + D B + B E ⊐ X, erit con. ſuperf. C A V B D ⊏ triang C V D. *Q.E.D.*

Ita τῆς ἀκριβείας ergò rem ex ſe ſatis claram demonſtrat *Archimedes*, ut & tres ſequentes non minùs αὐτοφανεῖς & αὐτοπίστους: nimirum abhorret is à multiplicandis extra neceſſitatem axiomatis & poſtulatis.

Prop. XIII.

Si ducantur rectæ (A C, B C) *tangentes circulum* (A D B) *qui baſis eſt coni* (V A D B) *in eodem quo circulus exiſtentes plano, & ſibimet occurrentes; à contactibus verò* (A, B) *& ab occurſu* (C) *ad coni verticem* (V) *ducantur rectæ* (A V, B V, C V); *triangula* (A V C, B V C) *à tangentibus & ad coni verticem adjunctis* (*comprehenſa*) *majora ſunt coni ſuperficie abſumptâ ab ipſis.* Fig. 16.

Biſecetur arcus A B in D, & per D ducatur tangens E F, & connectantur
V E, V F; [a] éſtque E C + F C ⊏ E F; quare addito [a] 20. 1.
communi A E + B F, erit A C + B C ⊏ A E + E F + B F. [b] 1. 6.
[b] proinde triang A V C + B V C ⊏ triang A V E + B V F + EVF
(quandoquidem communis eſt horum triangulorum altitudo). Sit exceſſus
X, non minor ſegmentis A E D, B F D: jam quia pyramidica
ſuperficies E A V B F, cujus baſis eſt trapezium E A B F, [c] major [c] 4 *ax. huj*
eſt incluſâ conicâ ſuperficie A V B, cum ſegmento A D B (communi
exiſtente termino perimetro trianguli A V B); & ſubtrahendo commune
ſegmentum A D B triangula A V E, E V F, B V F cum ſegmentis
A E D, B F D majora ſunt conicâ ſuperficie A V B D: magis
igitur triangula A V E, E V F, B V F cum X majora ſunt eâdem [d] *hyp.*
ſuperficie; [d] hoc eſt triang A V C + B V C ⊏ con. ſuperf. AVBD.
Sin X minor ſit ſegmentis A E D, B F D, biſecentur arcus A D, B D,
& ipſorum ſemiſſes, ac ita continuò [e] donec reſidua ſegmenta A L G, [e] 9 *hujus.*
G K G, D M H, H N B minora evaſerint quàm X. & ductis rectis
V L, V K, V M, V N ſimiliter procedet demonſtratio ac in præcedenti.

Digitized by Google

Prop. XIV.

Fig. 17. *Si in ſuperficie recti cylindri* (A C D B) *ſint duæ rectæ* (A C, B D), *cylindri ſuperficies* (A C F D B F A) *rectis intercepta, major eſt parallelogrammo* (A C D B) *comprehenſo rectis* (A C, B D) *in ſuperficie cylindri, & illis* (A B, C D) *quæ terminos ipſarum conjungunt.*

Biſecentur arcus A B, C D in E, F; & ducantur A E, B E, C F,
a 20. 1. D F: & ob A E + E B [a] ⊏ A B, [b] erit pgr. A E F C + B E F D
b 1 6. ⊏ pgr A B D C (exiſtente pari omnium altitudine): ſit X exceſſus non minor primò ſegmentis A E, B E, C F, D F; jam cylindrica ſu-
c 4 *ax. hujus.* perficies A E B D F C + ſegm. A E B, C F D [c] ⊏ pgr. A E F C, B E F D + triang. A E B, C F D (communi exiſtente termino parallelogrammo A B C D) ergo ſubtrahendo commune triang. A E B + C F D, erit cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegment. A E, B E, C F,
d *hyp.* D F ⊏ pgr. A E F C + B E F D [d] = pgr. A B C D + X. quare cùm X ſit æqualis, aut minor ſegmentis iſtis, liquet cylindricam ſuperficiem A E B D F C majorem eſſe pgr. A B C D.

Sin X ſegmentis iſtis minor ſit, biſecentur arcus A E, B E, C F, DF,
e 8 *hujus.* & ipſorum ſemiſſes, [e] donec reſidua ſegmenta A G, G E, E H, H B; C L, L F, F M, M D minora ſint ipſo X: tum ductis rectis, ut in figura, erit (ut prius) $\left\{\begin{array}{l}\text{pgr. AGLC} + \text{GEFL} \sqsubset \text{pgr AEFC.}\\ \text{pgr. BHMD} + \text{HEFM} \sqsubset \text{pgr BEFD.}\end{array}\right.$
Et quia Cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegm. A E B, C F D ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M + rectilin. fig. A G E H B, C L F M D (communi exiſtente termino parallelogrammo A B D C) ergò, ſubtractis communibus iſtis figuris rectilineis, cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegm. A G, G E, E H &c. ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M ⊏ pgr. A E F C + B E F D = pgr. A B D C + X. Unde cùm X ſegmentis iſtis major ſit, liqui-
conſ. dò patet cylindricam ſuperficiem A E B D F C majorem eſſe parallelogrammo A B D C. *Q.E.D.*

Prop. XV.

Fig. 18. *Si in ſuperficie recti cujuſdam cylindri ſint duæ rectæ* (A C, B D) *à terminis verò rectarum ducantur quædam* (A E, B E. & C F, D F) *tangentes circulos, qui baſes ſunt cylindri, in eodem exiſtentes plano, & concurrentes; parallelogramma* (A E F C, B E F D) *comprehenſa ſubtangentibus & lateribus cylindri, majora erunt cylindri ſuperficie, interceptâ rectis* (A C, B D) *quæ ſunt in ſuperficie cylindri.*

Biſecentur arcus A G in B, & ducatur tangens K G L; & erigantur K M, L N parallelæ axi cylindri, & connectatur M N: & liquet eſſe pgr. A E F C + B E F D ⊏ pgr. A K M C + K L N M + B L N D (quia, [a]ut priùs, A E + B E ⊏ A K + K L + B L). *a in 13 hujus.* Sit exceſſus X, non minor primò ſegmentis A K G, B L G, C M H, D N H. Et quia ſuperficies compoſita ex parallelogrammis A K M C, K L N M, B L N D & trapeziis A B L K, C D N M [b]⊏ cylind ſu- *b 4 ax. huj.* perf. A G B D H C + ſegm. A G B, C H D (communi exiſtente termino parallelogrammo A B D C) erunt, ſubtractis communibus ſegmentis A G B, C H D, reſidua pgrª A K M C. K L N M, B L N D + ſegm. A K G, B L G, C M H, D H N ⊏ cylindrica ſuperfic. A G B D H C. quare magis pgr. A K M C, K L N M, B L N D + X ([c]hoc eſt pgr. A E F C, B D F G) ⊏ cylind ſuperf. AGBDHC. *c hyp.* *Q.E.D.*

Sin X minor ſit dictis ſegmentis, biſecentur arcus A G, B G, du- *d 9 huj.* cantúrque tangentes, [d] uſque dum ſegmenta fiant minora quàm X; & ſimili tenore quo priùs demonſtratio progredietur.

Corollaria.

Hiſce verò demonſtratis, è prædictis liquet,

1. Quòd ſi cono Iſoſceli pyramis inſcribatur, pyramidis ſuperficies, excluſâ baſi, minor eſt ſuperficie coni, demptâ quoque baſi.

Nam ſingula pyramidem continentia triangula ſunt minora ſingulis *12 hujus.* ſuperficiebus conicis, quas intercipiunt & ſubtendunt. ergo illa ſimul his ſimul minora ſunt, hoc eſt ſuperficies pyramidis ſuperficie coni.

2. Et quòd ſi cono Iſoſceli pyramis circumſcribatur, ſuperficies *13 hujus.* pyramidis, exceptâ baſi, major eſt ſuperficie coni, baſi quoque ſeclusâ.

3. Item apparet ex oſtenſis, quòd ſi cylindro recto priſma inſcribatur, priſmatis ſuperficies è parallelogrammis compoſita minor eſt ſuperficie cylindri, ſine baſi.

Minus enim eſt ſingulum priſmatis parallelogrammum ſuperficie *14 hujus.* cylindricâ, quam abſcindit.

4. Et quòd ſi cylindro recto priſma circumſcribatur, priſmatis *15 hujus.* ſuperficies, parallelogrammis conſtans, major eſt ſuperficie cylindri, ſepoſitâ baſi.

Hactenus ad ſequentes demonſtrationes utilia lemmata præſtravit; ad principalia jam progreditur Theoremata.

Prop. XVI.

Fig. 19. 20.

Omnis cylindri recti ſuperficies (S), *excluſâ baſi, æqualis eſt circulo, cujus radius* (A) *proportione medius eſt inter cylindri latus* (L), *& baſis diametrum* (2 R).

Si neges, eſto primùm S ⊏ ⊙ A; & circa circulum A deſcribatur figura (quæ vocetur C), & inſcribatur ſimilis altera (quæ dicatur I) [a]ita ut C. I ⊐ S. ⊙ A. tum cylindri baſi circumſcripta concipiatur figura ſimilis ipſi C, quæ nominetur K: ejúſque perimeter dicatur P. Jam ob 2 R. A [b]:: (A. L [c]::) 2 A. 2 L; vel antecedentes dimidiando R. A :: A. 2 L. erit [d] Rq. Aq. (hoc eſt K. C) :: R. 2 L [e]:: $\frac{R}{2}$. L :: [f]$\frac{RP}{2}$. L P; ergo cùm ſitq; K $= \frac{RP}{2}$. [h] erit C $=$ L P. [k] ergo L P. I ⊐ S. ⊙ A. atqui L P ⊙ A. [l] ⊐ L P. I. ergo magis L P. ⊙ A ⊐ S. ⊙ A. [m] unde L P ⊐ S. hoc eſt ſuperficies priſmatis ſuperſcripti minor eſt ſuperficie cylindri, contra 4 Coroll. præcedentis. ergo non eſt S ⊏ ⊙ A.

Sin dicatur S ⊐ ⊙ A, [a]fiat C. I ⊐ ⊙ A. S. & inſcripta concipiatur baſi cylindri figura ſimilis ipſi I, quæ dicatur Y, ejúſque perimeter P. tum ob Y. I :: [e] Rq. Aq [n] :: $\frac{RP}{2}$. L P; & Y [g] ⊐ $\frac{RP}{2}$, [h] erit I ⊐ L P. Verùm C. I [b] ⊐ ⊙ A. S [l] ⊐ C. S. [m] adeóque S ⊐ I. ergo magis S ⊐ L P. hoc eſt ſuperficies cylindri minor eſt inſcripti priſmatis ſuperficie, contra 3. coroll præcedentis. ergo non eſt S ⊐ A. Supereſt igitur, ut ſit S $=$ ⊙ A. *Q. E. D.*

a 6 *hujus.*
b *hyp.*
c 15. 5.
d *cor.* 20. 6.
e 1. 12.
f 1. 6.
g
h 14. 5.
k *conſt.*
l 8. 5.
m 10. 5.
n *prius.*

Corollaria.

1. Cylindricæ ſuperficies ſuper æqualibus baſibus conſtitutæ ſe habent ut latera, vel altitudines.

2. Cylindricæ ſuperficies æquè altæ ſe habent ut diametri baſium.

3. Cylindricæ ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.

4. Similes cylindricæ ſuperficies rationem habent laterum, vel diametrorum duplicatam.

5. Æqualium ſuperficierum cylindricarum latera & diametri proportione reciprocantur; & converſe, ſi reciprocentur hæc proportione, iſtæ ſunt æquales.

Cùm enim cylindricæ ſuperficies ſe habeant ut circuli, quibus æquantur; & circuli ut quadrata radiorum; & hæc quadrata æquentur rectangulis ex latere & diametro cylindrorum; & iſta rectangula dictas habeant paſſiones (ut in elementis oſtenditur) ergo hæc patent.

Prop. XVII.

Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies (S) *abſque baſi, æquatur circulo, cujus radius* (A) *mediam habet proportionem inter coni latus* (L) *& baſis circularis radium* (R). Fig. 21.

Si neges, ſit primò S $\sqsubset$ $\odot$ A: & circulo A circumſcribatur figura C, & inſcribatur altera I [a] ſic ut C. I :: $\sqsupset$ S. $\bigcirc$ A; tum baſi coni circumſcribatur quoque figura ſimilis ipſi C, quæ vocetur K, ejúſque ſemi-perimeter appelletur P. Jam quia R. A [b] :: A. L. [c] erit Rq. Aq. ([d] id eſt K. C) :: R. L [e] R P. L P; ergo quum ſit K [*] = R P; [f] erit C = L P. [g] quare L P. I $\sqsupset$ S. $\odot$ A. [h] ſed L P. $\odot$ A $\sqsupset$ L P. I. ergo magis L P. $\odot$ A $\sqsupset$ S. $\odot$ A. unde L P. $\sqsupset$ S. [l] hoc eſt ſuperficies pyramidis cono circumſcriptæ conicâ ſuperficie minor eſt; contra prius oſtenſa, in 2. coroll. 15 hujus.

Sed ſecundò ſit S $\sqsupset$ $\odot$ A. [a] fiátque C. I $\sqsupset$ $\odot$ A. S. & coni baſi inſcribatur figura Y, ſimilis ipſi I, cujus ſemiperimeter appelletur ϖ. Jam Y. I [d] :: Rq. Aq [c] :: R. L :: [e] Rϖ. Lϖ. & [*] Y $\sqsupset$ Rϖ. unde I [f] $\sqsupset$ Lϖ. atqui C. I. $\sqsupset$ $\bigcirc$ A. S [h] $\sqsupset$ C. S. & conſequenter S [k] $\sqsupset$ I $\sqsupset$ Lϖ. [m] hoc eſt ſuperficies coni minor eſt ſuperficie pyramidis cono inſcriptæ, itidem contra demonſtrata, in 1. Coroll. 15. hujus.

a *6 hujus.*
b *hyp.*
c *cor.* 20. 5.
d 1. 12.
e 1. 6.
*
f 14. 5.
g *hyp.*
h 8. 5.
k 10. 5.
l 11. *hujus.*
m 10 *hujus.*

Corollaria.

1. Conicæ ſuperficies ad æquales Baſes poſitæ ſunt ut diametri baſium.
2. Conicæ ſuperficies æquè altæ, vel æqualia latera habentes ſunt ut diametri baſium.
3. Conicæ ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes conicæ ſuperficies habent duplicatam laterum vel diametrorum rationem.
5. Æquales conicæ ſuperficies quoad latera & diametros proportione reciprocantur; & converſè.

Prop.

Prop. XVIII.

Fig. 22.

Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies (S) *eandem ad baſin rationem habet, quam coni latus* (L) *ad baſis radium* (R).

a 1. *6.*
b *cor.* 2. 12.
c 17 *hujus.*

Nam L. R [a] :: (L R. Rq [b] :: ⊙ rad. $\sqrt{}$ L R. ⊙ R. ([c] hoc eſt ::) S. ⊙ R. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Not. *in hoc & ſequentibus triangula conos repræſentantia cenſentur per axes trajecta.*

Si conus Iſoſceles (A B C) *ſecetur plano* (D Q E) *baſi* (B P C) *parallelo, parallelis planis intercepta coni ſuperficiei* (D B C E) *æquatur circulus, cujus radius* (Z) *mediam habet proportionem inter coni latus* (D B) *parallelis planis interjectum, & æqualem utrique radio* (F B + G D) *circulorum* (B P C, D Q E) *qui in parallelis ſunt planis.*

Fig. 23. 24.
a *hyp.*
b 17. *6.*
c *ſch.* 1.2.
d 16. 6.
e 4. 6.
f *cor.* 2. 12.
g 17. *hujus.*

Nam ob D B. Z [a] :: Z. B F + D G, [b] erit Zq = D B ×: B F + D G = A B — A D ×: B F + D G [c] = A B × B F + A B + D G — A D × B F — A D × D G = A B × B F — A D × D G (eſt enim A B × D G [d] = A D × B F, ob A B. B F [e] :: A D. D G). [f] ergo ⊙ rad Z = ⊙ rad $\sqrt{}$ A B × B F — ⊙ rad A D × D G. Verum ⊙ rad $\sqrt{}$ A B × B F [g] = ſuperf. A B C; & ⊙ rad $\sqrt{}$ A D × D G [g] = ſuperf. A D E. ergo ⊙ rad Z æquatur ſuperficiei D B C E. *Quod E. D.*

Fig. 25.

Coroll. Hinc ſi recta Y X biſecet latera D B, E C; erit circulus radio $\sqrt{}$ D B × Y X æqualis ſuperficiei conicæ D B C E.

Nam ductis rectis Y G, B E, F X; ob $DG = \frac{DE}{2}$, & $DY = \frac{DB}{2}$, erunt Y G, B E parallelæ; ergo in pgr. G Y U E eſt Y V = G E. Simili diſcurſu eſt V X = B F. unde Y X = G E + B F.

Prop. XX.

Fig. 26.

Si duo ſint coni Iſoſceles (B A C, X Z), *& unius ſuperficies* (B A C) *æqualis ſit alterius baſi* (Z); *& quæ à baſis centro* (D) *ad coni latus* (A C) *ducitur perpendicularis* (D E) *altitudini* (X) *æquetur; æquales erunt coni* (B A C, X Z).

a *hyp.*
b 7. 5.
c 4. 6.
d 18 *hujus.*
e 7. 5. & *hyp.*
f 11. 5.

Nam ductâ A D, ob X = [a] D E, erit A D. X [b] :: A D. D E [c] :: A C. C D (ſunt enim ſimilia triangula rectangula A D E, A C D) [d] :: ſuperf. B A C. baſ. B F C [e] :: Z. baſ. B F C [f] :: A D. X. Itaque

cum

cùm reciprocentur proportione baſes & altitudines conorum B A C, Z X, ii ſunt æquales. *Q.E.D.* g 15.12.

Prop. XXI.

Omni Rhombo (G A H D) *ex Iſoſcelibus conis* (G A A, G D H) *compoſito, æquatur conus* (X Z) *habens quidem baſin* (Z) *æqualem ſuperficiei unius coni* (G A H) *eorum qui Rhombum continent, altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad prioris coni latus unum* (A H). Fig. 27. 28.

Nam ob X[a] = D E, eſt A D. X[b] :: A D. D E[c] :: A H. K H[d] :: ſuperf. G A H. baſ. G L H[e] :: Z. baſ G L H. quare conus cujus altitudo[f] æquatur rectæ A D, & baſis circulo G L H æquatur cono X Z (ob reciprocam nempe proportionem A D. X :: Z. G L H). atqui conus altitudine A D, baſis G L H æquatur Rhombo A G D H (nam con G D H. con G A H[g] :: D K. A K; & componendo Rhomb A G D H. con G A H :: A D. A K[g] :: con $\left\{\begin{array}{l}\text{alt } A\,D.\\ \text{baſ } G\,L\,H.\end{array}\right.$ con GAH.) [h]ergo Rhombus A G D H æquatur cono X Z. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 7. 5.
c 4. 6.
d 18 *hujus.*
e *hyp.* & 7. 5.
f 15. 12.
g 14. 12.
h 1. *ax.* 1.

Prop. XXII.

Si conus Iſoſceles (B A C) *ſecetur plano* (G H) *baſi* (B C) *parallelo, à circulo verò facto* (G H) *deſcribatur conus* (G D H) *verticem habens baſis centrum* (D): *factus autem Rhombus* (G A H D) *auferatur à toto cono* (B A C), *reſiduo æquatur conus* (X Z), *habens quidem baſin* (Z) *æqualem ſuperficiei conicæ* (G B C H) *parallelis planis interceptæ; altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à baſis centro* (D) *ad coni latus unum* (A C). Fig. 29.

Conus enim, cujus altitudo eſt D E, & baſis æqualis ſuperficiei G B C H [a]æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem D E, & baſes æquales ſuperficiebus A B C, A G H, hoc eſt differentiæ coni A B C, & Rhombi A G D H (per duas præcedentes). quare conus X Z iſti differentiæ æquatur. *Q.E.D.*

a 11. 12.

Prop.

Prop. XXIII.

Fig. 30. *Si Rhombi* (G A H D) *ex Iſoſcelibus conis* (G A H, G D H) *compoſiti unus conus* (A G H) *ſecetur plano* (M N) *baſi* (G H) *parallelo; à facto autem circulo* (M N) *deſcribatur conus* (M D N) *habens verticem* (D) *eundem cum altero cono* (G D H), *ab integro verò Rhombo* (G A H D) *auferatur effectus Rhombus* (M A N D), *reſiduo æquatur conus* (X Z) *habens quidem baſin* (Z) *æqualem conicæ ſuperficiei* (M G H N) *parallelis planis* (M N, G H) *interceptæ, altitudinem verò* (X) *perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad latus* (A H) *reliqui coni* (G A H).

11. 12. Conus enim, cujus altitudo æqualis eſt ipſi D E & baſis ſuperficiei conicæ M G H N, æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem (D E), ac baſes æquales ſuperficiebus conicis A G H, A M N, *id eſt differentiæ Rhomborum A G D H, A M D N. ergo conus X Z iſti differentiæ exæquatur. *Q.E.D.*

* 21 *hujus.*

Prop. XXIV.

Fig. 31. *Si circulo* (A B C D) *inſcribatur polygonum * parilaterum ſimul ac æquilaterum* (A E B F C G D H), *& agantur rectæ* (E H, B D, F G) *polygoni latera conjungentes, quæ parallelæ ſint uni cuivis* (E H) *duo polygoni latera ſubtendentium, omnes conjunctæ* (E H + B D + F G) *ad circuli diametrum* (A C) *illam rationem habent, quam habet dimidia præter unum ſubtendens* (C E) *ad polygoni latus* (A E).

* ἀρτιόπλευρον.

Ducantur enim rectæ H B. D F. Et quoniam anguli A C E, A E H, E H B, H B D, B D F, D F G, F G C, æqualibus inſiſtentes arcubus, [a]æquales ſunt, liquet triangula rectangula C E A, E I A, H I K, B L K, D L M, F N M, G N C eſſe ſimilia; [b]adeóque eſſe C E. E A :: E I. I A :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. N M :: G N. N C. [c]quare ut C E ad E A, ſic antecedentes conjunctim E H + B D + F G ad conſequentes ſimul, hoc eſt ad totam diametrum A C: *Q. E. D.*

a 27. 3.
b 4. 6.
c 12. 5.

Coroll.

$$CE \times AC \overset{*}{=} EA \times : EH + BD + FG.$$

* 16. 6.

Prop.

Digitized by Google

Prop. XXV.

Si circuli ſegmento (F A G) *inſcribatur polygonum* (FBEAHDG) *latera habens, exceptâ baſe, æqualia, & numero paria; ducantur verò rectæ* (E H, B D) *parallelæ baſi, connectentes latera polygoni, omnes ductæ cum dimidia baſe* (E H + B D + F N) *ad ſegmenti altitudinem* (A N) *eandem habent rationem, quam habet illa* (C E), *quæ à diametro circuli ad polygoni latus ducitur, ad polygoni latus* (A E). Fig. 31.

Nam, prorſus ut in præcedenti, eſt C E. E A :: E I. A I :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. M N[a] :: E H + B D + F N. A N[*] :: C E. E A. *Q.E.D.* [a] 12. 5. [*] 16. 6.

Coroll. *A N * C E = E A *: E H + B D + F N.

Prop. XXVI.

Sit in ſphæra maximus circulus A B G D, eique inſcribatur polygonum æquilaterum, multitudo autem laterum ipſius menſuretur à quaternario; ſint verò A G, B D diametri: quòd ſi manente diametro A G circumvolvatur circulus A B G D, polygonum continens; liquet quòd peripheria ejus ſecundùm ſphæræ ſuperficiem feretur. Anguli verò polygoni, præter eos qui ad puncta A, G ſecundùm peripherias ferentur circulorum in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, & rectorum circulo A G B D. Diametri autem ipſorum erunt rectæ polygoni angulos conjungentes, ad B D parallelæ. Aſt polygoni latera ſecundùm conos quoſdam ferentur; nempe A Z, A N ſecundùm ſuperficiem coni, cujus quidem baſis erit circulus circa diametrum Z N, vertex autem punctum A. Sed H Z, M N ſecundùm ſuperficiem quandam conicam ferentur, cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum H M, vertex verò punctum , in quo occurrent productæ H Z, M N ſibi mutuò & ipſi G A. Quinetiam H B, M D ferentur juxta conicam ſuperficiem, cujus baſis eſt circulus circa diametrum B D ad circulum A B G D rectus, vertex autem punctum in quo conveniunt B H, D M, ſecum invicem, & cum recta G A. Haud abſimiliter in altero ſemicirculo, latera ſecundùm ſuperficies conicas deferentur, itidem hiſce conſimiles. Ita quidem inſcripta erit ſphæræ figura quædam prædictis ſuperficiebus conicis comprehenſa, cujus ſuperficies minor erit ſuperficie ſphæræ. Diviſâ enim ſphærâ plano per B D recto ad circulum A B G D, ſuperficies alterius hemiſphærii, & ſu- 4 ax. huj. Fig. 32.

Digitized by Google

perficies inſcriptæ ipſi figuræ eoſdem terminos habent in eodem plano; nam utriuſque ſuperficiei terminus eſt ſuperficies çirculi, qui circa diametrum BD circulo ABGD rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, atque ipſarum una ſuperficies comprehenditur ab altera, ac plano habenti eoſdem cum ipſo terminos. Haud aliter ſuperficies figuræ in altero hæmiſphærio minor eſt ſuperficie hemiſphærii: tota igitur ſuperficies figuræ, quæ in ſphæra, minor eſt ſuperficie ſphæræ.

Prop. XXVII.

Fig. 31. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (AEBFCGDH) *ſuperficies æquatur circulo, cujus radius poteſt rectangulum comprehenſum ſub figuræ latere* AE, *& rectâ* (EH + BD + FG) *æquali omnibus latera figuræ conjungentibus, paralleliſque duo figuræ latera ſubtendenti* (EH).

a 17. *hujus.*
b *cor.* 2. 12.
c 19 *hujus.*
d 3. *ax.* 1.

Nam $\odot$ rad $\surd$ AE $\times \frac{EH}{2}$ [a] $=$ ſuperf conica EAH. [b] quare $\odot$ rad $\surd$ AE $\times$ EH $=$ 2 ſuperf. EAH. Item (ſimili pacto) $\odot$ rad $\surd$ $\left|\begin{array}{ll} BE \times : BD + & EH^{c} \\ AE. & FG \end{array}\right.$ $=$ 2 ſuperf. BEHD. [d]ergo $\odot$ rad $\surd$. AE $\times$: EH + BD + FG $=$ 2 ſuperf. EAH + BEHD $=$ ſuperf. AEBFCGDHA.

* *hæc, & cor.* 24. *hujus.*

Coroll. * Hinc $\odot$ rad $\surd$ AC $\times$ CE $=$ fig. AEBFCGDHA.

Prop. XXVIII.

In ſphæram inſcriptæ figuræ ſuperficies (I) *conicis ſuperficiebus contenta, minor eſt quàm quadrupla maximi circuli* (ABCD) *eorum qui ſunt in ſphæra:*

a coll. 27 *h.*
b *cor.* 2. 12.

Nam ſuperf. I [a] $=$ $\odot$ rad $\surd$ AC $\times$ CE $\sqsubset$ $\odot$ rad AC [b] $=$ 4 $\odot$ rad AL.

Prop. XXIX.

Fig. 33. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (AFHDCBGE) *ſuperficiebus conicis contentæ, æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæram, altitudinem verò æqualem perpendiculari* (XZ) *à ſphæra centro* (Z) *in polygoni latus unum ductæ.*

Ducantur radii XE, XF, XG, XH, & connectantur anguli ab A utrinque æquè remoti rectis EF, GH. Eſtque Rhombo EXFA

[a]æqualis conus baſe conicâ ſuperficie E A F, altitudine X Z. Item, productis G E, H F ad Q; ſi ex Rhombo G X H Q ſubducatur Rhombus E X F Q, reſiduo E G X H F [b]æquabitur conus baſe ſuperficie conicâ E G H F, altitudine quoque X Z. Similiter, productis B G, D H ad P, ſi ex cono B P D ſubtrahatur Rhombus G X H P, reſiduo G B X D H [c]æqualis erit conus, cujus baſis æquatur conicæ ſuperficiei B G H D, altitudo rurſus ipſi Z X. Idem erit in reliquo hemiſphærio B C D. ergo cùm hiſce conis omnibus [d]æquetur conus K; is ſolido quoque inſcripto æquabitur. *Q.E.D.*

a 21 *hujus.*
b 23 *hujus.*
c 22 *hujus.*
d 11. 12.

Prop. XXX.

Inſcripta ſphæræ figura conicis ſuperficiebus contenta minor eſt quàm quadrupla coni (M) baſin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in ſphæra, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.

Nam coni K, in præcedente, [a]baſis minor eſt quàm quadrupla circuli maximi, & ejus quoque altitudo X Z minor radio ſphæræ; ergo quadruplus coni M major eſt iſto cono K; hoc eſt figurâ inſcriptâ. *Q. E. D.*

a *hyp.* & 29. *h.* 11, 12.

Prop. XXXI.

Sit in ſphæra maximus circulus ABGD. Circa verò circulum ABGD deſcribatur polygonum æquiangulum & æquilaterum; multitudo autem laterum ipſius menſuretur à quaternario. Circulo autem circumſcriptum polygonum comprehendat circulus circumſcriptus E Z H T, circa idem centrum exiſtens ac ABGD. Manente verò EH circumvolvatur planum EZHT, in quo polygonum & circulus. Liquet igitur quòd quidem peripheria circuli ABGD ſecundùm ſphæræ ſuperficiem deferetur, ipſius autem E Z H T peripheria ſecundùm ſuperficiem alterius ſphæræ minori concentricæ feretur: contactus autem, ad quos latera tangunt, circulos deſcribunt rectos circulo ABGD in minori ſphæra. Anguli verò polygoni, præter illos qui ad puncta E, H, ſecundùm peripherias circulorum feruntur in majoris ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, ad circulum E Z H T rectorum; verùm latera polygoni ſecundùm conicas ſuperficies, utique ſicut in præcedentibus. Erit igitur figura comprehenſa à ſuperficiebus conicis, minori ſphæræ circumſcripta, majori verò inſcripta. Quòd autem circumſcriptæ figuræ ſuperficies major ſit ſuperficie ſphæræ, ſic oſtendetur. Eſto enim K D diameter alicujus circuli eorum, qui in minori ſunt ſphæra, exiſtenti-

Fig. 34.

bus K, D punctis ad quæ duo latera circumſcripti polygoni tangunt circulum A B G D; diviſâ nempe ſphærâ plano per K D ad circulum A B G D recto, etiam ſuperficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ dividetur à plano: utriuſque enim ſuperficiei terminus eſt circumferentia circuli, qui eſt ſuper diametrum K D ad circulum A B G D rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, & earum altera continetur ab altera ſuperficie, ac plano eoſdem terminos habenti. Minor
4 ax. hujus. igitur eſt comprehenſa portionis ſphæricæ ſuperficies ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ. Similiter & reliquæ portionis ſphæricæ ſuperficies minor eſt ſuperficie figuræ ipſi circumſcriptæ. Patet igitur quòd tota ſuperficies ſphæræ minor eſt ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ.

Prop. XXXII.

Fig. 35. *Superficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ* (E F G H I K L M) *æqualis eſt circulus, cujus radius poteſt æquale rectangulo comprehenſo ſub polygoni uno latere* (E F), *& rectæ æquali omnibus polygoni angulos connectentibus* (F M + G L + H K), *parallelis alicui* (F M) *ſubtendentium polygoni latera.*

Centro enim N (quod ſphæræ centrum eſt) per angulos polygoni deſcribatur circulus: huic inſcripta eſt figura E F G H I K L M. Ergo patet res ex 27 hujus.

Coroll. Ductâ F L eſt ⊙ rad. $\sqrt{FL \times GL} =$ ſuper. EFGHIKLM. ibid.

Prop. XXXIII.

Figuræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies major eſt quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli (A B C D).

a cor. 15. 1. Nam (in figura præcedenti) à centro N ad contactus oppoſitos
b hyp. O, P ducantur rectæ N O, N P ([a]quæ quidem in directum jacent, ob
c 34. 1. angulos G N O, L N P [b]æquales); connexâ verò F L, ſunt FL. OP
d 47. 1. [c]pares (ob O F, P L [b]parallelas ac pares) quare cùm G L [d] $\sqsubset$ F L,
e cor. 27 huj. erit $\sqrt{GL \times FL} \sqsubset$ O P. adeóque circulus radio $\sqrt{GL \times FL}$ ([e]hoc eſt ſuperficies figuræ E F G H I K L M) major eſt circulo cujus radi-
f cor. 2. 12. & 4. 2. us O P, [f]hoc eſt quadruplo circuli cujus radius N O, hoc eſt quadruplo A B C D. *Q. E. D.*

Coroll. Nota eſſe L F, P O pares.

Prop.

Prop. XXXIV.

Circa minorem ſphæram (A B C D) *deſcriptæ figuræ æqualis eſt conus, baſim quidem habens circulum æqualem ſuperficiei ipſius figuræ, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.*

Nam figuræ iſti circumſcribendo circulum E G I L, patet ex 29. hujus.

Prop. XXXV. Coroll.

Figura ſphæræ minori circumſcripta major eſt quàm quadrupla coni, baſin quidem habentis maximum in ſphæra circulum, altitudinem verò radium ſphæræ.

Patet conferendo duas proximè antecedentes.

Prop. XXXVI.

Fig. 36.

Si ſphæræ inſcripta ſit figura (A N B C D), *& alia circumſcripta* (E F G I L) *ſub ſimilibus polygonis, ad eundem modum quo priùs conſtructis circumſcriptæ figuræ ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ, duplicatam rationem habet ejus, quam latus* (G F) *circumſcripti maximo circulo polygoni, ad latus* (B N) *polygoni eidem circulo inſcripti. Ipſa verò figura circumſcripta, ad figuram inſcriptam, rationem habet ejuſdem rationis triplicatam.*

Nam 1° ductis D N, L F, ob ſimilitudinem figurarum eſt angulus a 4. 6.
G L F æqualis angulo B D N. adeóque rectangula triangula G L F, b 1. 6.
B D N ſunt ſimilia. & G L. L F[a]:: B D. D N. Eſt autem G Lq. G L c 20. 6.
× L F[b]:: G L. L F[a]:: B D. D N[b]:: B Dq. B D × D N. & permutan- d *cor.* 2. 12.
do G Lq. B Dq ([c]hoc eſt G L. B D, bis,[a] vel G F. B N, bis) :: G L e *ſch.* 7. 5. & *cor.* 27 *hujus.*
× L F. B D × D N[d]:: ⊙ rad √ G L × L F. ⊙ rad √ B B × D N
([e] hoc eſt) :: ſuperf. E F G I L. ſuperf. A N B C D. *Q.E.D.*

2. Ducatur Z O, à centro Z ad tactum O. Eſtque conus, [f] cujus f 34 *hujus.*
baſis eſt ⊙ rad √ G L × L F, & altitudo Z O, [f]æqualis corpori cir- g 29 *hujus.*
cumſcripto. [g] Conus autem baſe ⊙ rad √ B D × D N, altitudine Z P, h 24. *def.* 11.
æquatur corpori inſcripto. Hi coni [h]ſimiles ſunt, (quia Z O. Z P[a]:: k 15. 5.
G O. B P[k]:: G F. B N :: [l] √ G L × L F. √ B D × D N.) ergo ſunt l *priùs* & 22. 6.
hi coni (hoc eſt iſtà corpora) in triplicata ratione ipſarum Z O, Z P, m 12. 12. & 15. 5.
vel G F, B N. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. XXXVII.

Fig. 37.

Omnis ſphæræ ſuperficies (S) *quadrupla eſt maximi circuli, eorum qui ſunt in ſphæra.*

a 3 *hujus.*
b 4 *hujus.*
c 8. 5. & 31 *h.*
d 36 *hujus.*
e *conſt.*
f 17. 6.
g *conſt.*
h 10. 5.
* *ut priùs.*
k 26 *hujus,* & 8. 5.

Circulus maximi in ſphæra circuli quadruplus dicatur X: & primò ſi fieri poteſt, ſit X ⊐ S. Fiat autem, utcunque G. H [a] ⊐ S. X. & ſphæræ circumſcribantur ac inſcribantur figuræ, (quales innuunt præcedentia) ſic ut [b] latus D E. B C ⊐ G. √ G H. Harum verò figurarum ſuperficies appellentur Y, Z. Eſtque S. Z [c] ⊐ Y. Z. [d] = D E. B C, bis [e] ⊐ G. √ G H bis [f] = G. H [g] ⊐ S. X. [h] ergo Z ⊏ X. hoc eſt inſcriptæ figuræ ſuperficies major eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 28 hujus.

Sin verò dicatur X ⊏ S. fiat G. H [a] ⊐ X. S. ac D E. B C [b] ⊐ G. √ G H. éſtque Y. S [k] ⊐ Y. Z * ⊐ G. H [g] ⊐ X. S. [h] unde Y ⊐ X; hoc eſt circumſcriptæ figuræ ſuperficies minor eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 31 hujus. Reſtat igitur, ut ſit X = S. *Q.E.D.*

Hoc nobiliſſimum Theorema (cum eo, quo univerſale redditur, ſubſequente ad Prop. XLIX.) inter *Archimedis* (dicam, an omnia quotquot fuerunt Geometrarum) inventa familiam ducit, cùm inveniendi ſubtilitate, tum rei elegantiâ, ſed & utilitate diffusâ.

Coroll. Circulus, cujus radius æquatur diametro ſphæræ, adæquat ſphæræ ſuperficiem.

Lemma. Sint duæ quæcunque rectæ L, M; oportet invenire alteram N, ita ut ſit L. M ⊏ L. N, ter. Fiat L. P :: P. M. & L. N :: N. P. Erit L. M = L. P, bis = L. N quater ⊏ L. N, ter.

Prop. XXXVIII.

Omnis ſphæra (A) *quadrupla eſt coni* (K) *baſim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in ſphæra, altitudinem verò radium ſphæræ.*

a 3 *hujus.*
b *Lemma præced.*
c 4 *hujus.*
d 8. 5.
e 36 *hujus.*
g *conſt.*
h 10. 5.
* *priùs.*

Si fieri poteſt, ſit primùm A ⊏ 4 K. Fiat A. 4 K [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N, ter: tum figuræ circumſcribantur & inſcribantur (quæ vocentur Y, Z) ita ut latus D E. B C [c] ⊐ L. N. Eſtque A. Z [d] ⊐ Y. Z [e] = D E. B C, ter [g] ⊐ L. N, ter [g] ⊐ L. M [g] ⊐ A. 4 K. [h] ergo Z ⊏ 4 K. contra 30 hujus.

Sin dicas eſſe 4 K ⊏ A. ſit 4 K. A [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N, ter. & D E. B C [c] ⊐ L. N. tum erit Y. A. ⊐ [d] Y. Z * ⊐ L. M. [g] ⊐ 4 K. A. [h] quare

[h]quare Y $\sqsupset$ 4 K. contra 35 hujus. Ergo potiùs eſt ſphæra A $=$ 4 K. *Q.E.D.*

Coroll. Hemiſphærium æquatur duplo cono ad eandem baſin & æquè ſibi alto; vel cono ad eandem baſin & altiudinem habenti duplam.

Prop. XXXIX. Coroll.

Hiſce verò præmonſtratis liquet, quòd omnis cylindrus (A B C D) *baſim quidem habens maximum in ſphæra circulum* (A B), *altitudinem verò* (A D) *æqualem diametro ſphæræ, ſeſquialter eſt ſphæræ* (FGHK); *& quòd ſuperficies iſtius cylindri cum baſibus ſeſquialtera quoque eſt ſuperficiei ſphæræ.* Fig. 38.

Nam per E (ſphæræ centrum) ductâ F H ad A B parallelâ, & junctis E A, E B; eſt

1. $\frac{1}{6}$ Cyl A B C D [a] $=$ $\frac{1}{3}$ Cyl A B H F [b] $=$ con A E B [c] $=$ $\frac{1}{4}$ ſph. F G H K. [d] ergo Cyl A B C D. Sph F G H K :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Superf. cyl A B C D [e] $=$ $\odot$ rad $\sqrt{}$ A D $\times$ D B $=$ $\odot$ rad A B [f] $=$ 4 $\odot$ F G H K [g] $=$ ſuperf. ſphæræ. ergo ſuperf A B C D $+$ 2 $\odot$ F G H K. ſuperf. ſphæræ :: 6. 4 :: 3. 2.

a 14. 12.
b 10. 12.
c 38 *hujus.*
d *ſch.* 15. 5.
e 16 *hujus.*
f 4. 2. & 2 *cor.* 12.
g 37 *hujus.*

Prop. XL.

Secetur ſphæra plano non per centrum, ſitque in ipſa maximus circulus A E Z ſecans perpendiculariter planum ſecans. Inſcribatur autem portioni A B C polygonum æquilaterum, & parilaterum, exceptâ baſe A B. Haud abſimiliter ac antehac, ſi manente G Z circumducatur figura, anguli quidem D, E, A, B ferentur ſecundùm circulos, quorum diametri D E, A B; latera verò *figuræ ſecundùm conicas ſuperficies; eritque facta figura ſolida conicis ſuperficiebus comprehenſa, baſin quidem habens circulum, cujus diameter A B, *verticem autem C: quinimò ut in præcedentibus, ſuperficiem habebit minorem ſuperficie portionis comprehendentis. Siquidem tam portionis quàm figuræ idem in plano terminus eſt circumferentia circuli, cujus diameter A B, & ad eaſdem cavæ ſunt ambæ ſuperficies, & una ab altera comprehenditur. Fig. 39.

**lego* σχήματος *pro* τμήματος.
**lego* κορυφὴν *pro* κορυφῆ.
ax. 4 *hujus.*

Prop. XLI.

Superficies inſcriptæ in ſphæræ portionem figuræ (A D F B G E C) *æqualis eſt circulo, cujus radius poteſt æquale rectangulo comprehenſo ſub uno latere* (B F) *polygoni in maximi circuli ſegmentum* (A B C) *inſcripti,* Fig. 40.

inſcripti, & recta (FG + DE + AK) *æquali omnibus ad ſegmenti baſin* (AC) *parallelis, cum ſemiſſe diametri baſis.*

a 17 *hujus.* Nam ⊙ rad √BF × FH[a] = ſuperf con FBG & ⊙ rad $\sqrt{\substack{DF\\BF}}$
b 19 *hujus.* ×: HG + DI[b] = ſuperf. DFGE. Item ○ rad $\sqrt{\substack{DA\\BF}}$ ×: IE +
AK[b] = ſuperf ADEC. [c] ergo conjunctè ⊙ rad √BF ×: FG +
c { 1. 2. DE + AK = ſuperf FBG + DFGE + ADEC = ſuperf
cor. 2. 12. ADFBGEC. *Q.E.D.*
1. *ax.* 1.

Coroll Ductâ LF, erit ⊙ rad √BK × LF = ſuperf ADFBGEC.
d *cor.* 25 *huj.* Nam BF ×: FG + DE + AK[d] = BK × LF.

Prop. XLII.

Sphæræ portioni inſcriptæ figuræ ſuperficies (S) *minor eſt circulo, cujus radius æquatur ductæ* (BA) *à portionis vertice* (B) *in circumferentiam circuli* (AC) *qui baſis eſt coni.*

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. Nam BK × LF ⊐ BK × LB[a] = BAq. [b] ergo ⊙ rad BK × LF
b *cor.* 2. 12. ([c] hoc eſt S) ⊐ ⊙ rad AB.
c *cor. præc.*

Prop. XLIII.

Fig. 41. *Portioni inſcripta figura* (ADBEC) *conicis ſuperficiebus contenta cum cono* (AFC) *baſin quidem eandem habente cum figura, verticem verò ſphæræ centrum* (F), *æquale eſt cono* (K) *baſin habenti parem ſuperficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari* (FG) *à ſphæra centro* (F) *in unum polygoni latus* (AD) *deductæ.*

a 21 *huj.* Conus enim baſe ſuperficie DBE,[a] altitudine FG æquatur Rhom-
b 23 *hujus.* bo DFEB. [b] Item conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei ADEC,
c 11. 12. altitudo ipſi FG æquatur fruſto ADFEC: [c] iſti ſimul coni adæquant conum K; hic Rhombus & fruſtum conſtituunt figuram inſcriptam cum cono AFC. ergò con K = fig. ADBEC + con AFC. *Q.E.D.*

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemiſphærio minorem. In majori AYC ſubtrahendus eſt conus AFC, ut ſit con K = fig. AYC — con AFC. nempe ſi figura latus habens AD toti circulo inſcribi poſſit; vel ſi arcus AD circulum dimetiri poſſit, alias non ſuccedit. Similis eſt diſcurſus; quid plura? Idem in ſequentibus intelligendum, analogiâ bene ſervatâ.

Coroll. Conus, cujus baſis æquatur circulo radium habente parem rectæ B C à vertice portionis ad baſis circumferentiam ductæ, & altitudo radio ſphæræ, ſuperat inſcriptam figuram cum cono A F C.

Hujus enim coni tam *baſis, quàm altitudo ſuperant baſim & altitudinem coni K.

* 42 *hujus.*

Prop. X L I V.

Fig. 42.

Sit ſphæra, & in ipſa maximus circulus A B C, & ſemicirculo abſcindatur rectâ A B; ſitque centrum D; ac à centro D ad A, B connectantur D A, D B: & circa factum ſectorem deſcribatur polygonum, & circa ipſum circulus; habebit utique centrum idem cum circulo A B C: quòd ſi manente E K circumductum polygonum in idem denuò reſtituatur, deſcriptus circulus ſecundùm ſphæræ ſuperficiem feretur; & anguli polygoni circulos deſcribent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli exiſtentes ipſi A B. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori ſphæra circulos deſcribunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ exiſtentes ad A B, latera verò ſecundùm conicas ſuperficies ferentur, & erit circumſcripta figura conicis ſuperficiebus contenta, cujus baſis qui ſuper Z H circulus. Superficies autem dictæ figuræ major eſt ſuperficie minoris portionis, cujus baſis qui circa A B circulus: ducantur enim tangentes A M, B N. ſecundùm conicam ergo ſuperficiem ferentur; & à polygono A M T E N B genita figura majorem habebit ſuperficiem, quàm portio ſphæræ, cujus baſis eſt qui circa diametrum A B circulus: nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui ſuper diametrum A B; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipſis Z M, H N ſuperficies conica major eſt facta ab ipſis M A, N B; major enim eſt Z M quàm M A (rectum quippe *ſubtendit), ac N H, quàm N B; quando verò hoc fuerit, major eſt ſuperficies ſuperficie: hæc enim in lemmatis oſtenſa ſunt. Liquet igitur quòd circumſcriptæ figuræ ſuperficies major eſt ſuperficie portionis minoris ſphæræ.

* Z A M. *Facilè deducitur ex 19 huj.*

Prop. X L V. Coroll.

Fig. 43.

Et patet quòd ſuperficies circumſcriptæ ſectori figuræ æquatur circulo, cujus radius poteſt comprehenſum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & præterea ſemiſſe baſis dicti polygoni.

Nam * circumſcripta figura, majoris ſphæræ portioni inſcripta eſt. Unde liquet ex *antedictis.

* Pro ἐγγεγραμμένου lego περιγεγρ.

* 41 *hujus.*

Prop. XLVI.

Fig. 43. *Superficies* (S) *figuræ* (D E F G H) *circa ſectorem* (Z A B C) *deſcriptæ major eſt circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à vertice* (B) *portionis in circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt portionis.*

a cor. 41 huj. Circa figuram deſcribatur ſphæra D F H L; & connectantur re-
b cor. 33 huj. ctæ D H, F D, L E. éſtque $S\,^{a} = \odot\,\text{rad}\,\sqrt{LE \times FP} = \odot\,\text{rad}\,\sqrt{}$
c hyp. & 4. 6. $BM \times FP$ (^{b}ob $LE = BM$) $\sqsubset \odot\,\text{rad}\,\sqrt{BM \times BK}$. (eſt enim
d 14. 5. (6. $FP.BK\,^{c} :: FD.\,BA ::\,^{c} ZD.\,ZA$. adeóque $FP\,^{d} \sqsubset BK$). atqui
e cor. 8. & 17. $\odot\,\text{rad}\,\sqrt{BM \times BK}\,^{e} = \odot\,\text{rad}\,BA$. ergo $S \sqsubset \odot\,\text{rad}\,BA$. *Q.E.D.*
cor. 2. 12.

Prop. XLVII.

Fig. 44. *Quinetiam circumſcripta ſectori figura* (D E F G H) *cum cono* (D Z H), *cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum* (D H) *vertex verò centrum* (Z) *æqualis eſt cono, cujus quidem baſis æqualis eſt ſuperficiei figuræ, altitudo autem perpendiculari* (Z N) *à centro ad latus ductæ, quæ utique æqualis eſt radio ſphæræ.*

Figuræ circumducatur ſphæra D E F G H; & liquet propoſitum ex 43 hujus.

Corollarium.

Hinc apparet circumſcriptam figuram cum cono D Z H majorem eſſe cono, baſim quidem habente circulum cujus radius æquatur illi (B A) quæ à vertice (B) portionis minoris ſphæræ ad circumferentiam ducitur circuli (A C), qui baſis eſt portionis; altitudinem verò æqualem radio minoris ſphæræ.

a 46. & 47 h. Nam baſis hujus coni ^{a} minor eſt baſe coni, qui æquatur circumſcriptæ figuræ; altitudo autem æqualis.

Prop. XLVIII.

Fig. 45. Sit rurſus ſphæra, & in ipſa maximus circulus; ac ſemicirculo minor portio A B C, & centrum D; & ſectori A B C inſcribatur polygonum parilaterum, & huic ſimile circumſcribatur, ſintque latera lateribus parallela; & circa polygonum circumſcriptum deſcribatur circulus; & ſimiliter ac in præcedaneis manente H B circumlati circuli figuras efficiant à conicis ſuperficiebus circumſeptas; demonſtrandum eſt quòd circumſcriptæ figuræ ſuperficies ad inſcriptæ ſuperficiem duplicatam habet rationem, quam latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Figura verò cum cono triplicatam habet rationem ejuſdem.

Nam circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad E Z cum dimidia E Z, & latere E K, [a] æquatur ſuperficiei a 45 *hujus.*
circumſcriptæ: & circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad A C cum dimidia A C, & latere A L, [b] æquatur b 41 *hujus.*
ſuperficiei inſcriptæ. Hæc autem rectangula [*] ſimilia ſunt (ob poly- * 4. 6.
gonorum ſimilitudinem) adeóque [d] ſeſe habent, ut quadrata ex late- d 20. 6.
ribus E K, A L: quare & dicti circuli (hoc eſt ſuperficies circumſcripta, & inſcripta) [e] ſe habent ut quadrata ex E K, A L, [d] hoc eſt in e *cor.* 2. 12.
duplicatâ ratione ipſarum E K, A L.

2. Ducatur D M perpendicularis ad latera E K, A L. Et quoniam conus, habens baſim æqualem ſuperficiei polygoni circumſcripti,
altitudinem D M, [f] æquatur circumſcripto ſolido cum cono E D Z. & f 47 *hujus.*
conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei polygoni inſcripti, altitudo ipſi
D N, [g] æquatur ſolido inſcripto cum cono A D C. Sunt autem radii g 43 *hujus.*
baſium horum conorum (ut mox vidimus) ſicut latera E K, A L, [h] hoc h 4. 6.
eſt, ut altitudines D M, D N: [k] ergo hi coni ſimiles ſunt; adeóque k 24. *def.* 11.
[l] ſunt in triplicatâ ratione radiorum ſuorum, hoc eſt ipſarum E K, A L. l 12. 12.
& [m] proinde ſolida iſtis æqualia (circumſcriptum cum cono E D Z, & m 7. 5.
inſcriptum cum cono ADC) ſunt in eadem ratione triplicata. *Q.E.D.*

Prop. XLIX.

Cujuſcunque ſphæricæ portionis (A B C) *hemiſphærio minoris ſuperficies* (S) *æqualis eſt circulo* (X) *cujus radius æquatur ducta* (B A) *à portionis vertice* (B) *ad circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt portionis ſphæricæ.* Fig. 46.

Si neges, eſto primùm $\odot X \sqsupset S$. tum portioni circumſcribantur a 5 *hujus.*
& inſcribantur figuræ (quarum ſuperficies appellentur Y, Z) ſic ut la- b *conſt.*
tus E F. A D bis (vel E Fq. A Dq) [a] $\sqsupset \odot X. S.$ Jam S. X [b] $\sqsubset$ EFq. c 48 *hujus.*
A Dq [c] $=$ Y. Z. [d] $\sqsubset$ S. Z unde X [e] $\sqsupset$ Z, contra 42 hujus. d 44 *hujus.* & 8. 5.
Sin dicatur X $\sqsubset$ S. ſit E Fq. A Dq [a] $\sqsupset$ X. S. éſtque X. S. [b] $\sqsubset$ e 10. 5.
E Fq. A Dq [c] $=$ Y. Z [f] $\sqsubset$ Y. S. unde X [e] $\sqsubset$ Y, contra 46 hujus. f 40 *huj.* & 8. 5.
Itaque potius, ut hæ vitentur repugnantiæ, eſt $\odot X = S$. *Q.E.D.*

Prop. L.

Fig. 47. 48. *Quinimò ſi portio* (A B C) *major ſit hemiſphærio, ſimiliter ejus ſuperficies æqualis erit circulo, cujus radius æqualis eſt rectæ* (B A) *à portionis vertice deductæ ad circumferentiam circuli qui baſis eſt portionis.*

Ductâ enim diametro B D, & connexâ D A; erit circulus radio
a *coroll.* 38 *b.* D B [a]æqualis ſuperficiei totius ſphæræ; & circulus radio D A [b] æ-
b 49 *hujus.* qualis ſuperficiei portionis A D C. Detrahatur hic ab illo, [c] ſuper-
c *cor.* 2. 12. & 3. *ax.* 1. eſtque circulus radio B A æqualis reſiduæ portioni A B C. *Q.E.D.*

Corollaria.

1. Cujuſvis portionis ſuperficies (A B C) æquatur curvæ ſuperficiei cylindri (M R S N) habentis eandem altitudinem, vel axem (B K); & diametrum (R S) parem radio ſphæræ.

a 16 *hujus.* Nam ſuperf. cylindrica M R S N [a]æquatur circulo, cujus radius $\surd$ M R × R S, vel $\surd$ B K × B D, hoc eſt B A (nam B K, B A, B D ſunt
b 49 & 50 *h.* ∺) [b]id eſt æquantur ſuperficiei portionis A B C. Hinc

2. Superficies portionum A B C, A D C ſe habent ut axes K B K D. Nam cylindricæ ſuperficies ipſis æquales M R S N, μ R S ν [d], ſe habent ut latera R M, R μ, hoc eſt ut B K, K D.

3. Sphæricarum quarumvis portionum, ſuperficies axibus ſuis proportionales ſunt.

d 1. *cor.* 16. *b.* Nam & cylindricis ſuperficiebus quibus æquantur [d] hoc convenit.

4. Sphærica ſuperficies A α γ C parallelis planis A C, α γ intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei R ρ σ S iiſdem planis interceptæ.

Nam ſi à ſuperficie cylindrica ρ N, cui æquatur ſphærica ſuperf. α B γ ſubtrahatur cylindrica ſuperf, R N, cui æquatur ſphærica ſuperficies A B C, remanebit ſuperf. cylind. ρ S æqualis ſuperf ſphæricæ A α γ C.

5. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis planis interceptæ ſuis axibus proportionales ſunt.

Quia nempe cylindris, quibus æquales ſunt, id convenit.

Prop. LI.

Fig. 49. *Cuicunque ſphæræ ſectori* (G A B C, *vel* S) *æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens æqualem ſuperficiei portionis* (A B C) *ad ſectorem pertinentis, altitudinem verò parem radio ſphæræ.*

Si neges, eſto primùm S ⊏ K. fiátque S. K [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter. tum portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ X. Y, ſic ut latus E F. A D [c] ⊐ L. N, Eſtque S. Y + con A G C [d] ⊐ X + con E Z G. Y + con A G C [e] = E F. A D, ter [f] ⊐ L. N, ter [f] ⊐ L. M [f] ⊐ S. K. [g] ergo Y + con A G C ⊏ K; contra coroll. 43æ hujus.

Sin dicatur K ⊏ S. Fiat K. S [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter; & reliqua, ut priùs. & ob X + con E G Z. [d] Y + con A Z G ⊐ * L. M [f] ⊐ K. S [h] ⊐ K. Y + con A G C. [g] erit X + con E G Z ⊐ K, contra coroll. 47æ hujus. quin potiùs eſt con K = ſector S. *Q.E.D.*

[a] 3 *hujus.*
[b] *lem. ad* 37 *h.*
[c] 5 *hujus.*
[d] 8. 5.
[e] 48 *hujus.*
[f] *conſt.*
[g] 10. 5.
* *priùs.*
[h] 8. 5.

Schol. De ſectore ſphærico minori directè procedit demonſtratio, ſed infertur: idem facilè de majori. Nam quia conus, cujus baſis æquatur toti ſphæræ ſuperficiei, altitudo radio ſphæræ totam ſphæram exæquat; & conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei portionis A B C, altitudo itidem radio ſphæræ, ſectorem A G C B adæquat: detracto hoc cono ab illo, reſtabit conus, habens baſim æqualem reliquæ ſuperficiei ſphæricæ, altitudinemque parem radio ſphæræ, æqualis reſiduo ſectori majori.

Corollaria.

1. Hinc ſector (A G C B) æquatur cono, cujus altitudo ſphæræ radio, baſis æquatur circulo radium habenti parem ſubtenſæ B A.
2. Portio ſphærica (A B C) æquatur iſti cono, dempto vel addito cono A G C; (addito, ſi portio major ſit hemiſphærio, dempto ſi minor:) ſi ſector hemiſphærio æquetur, cum portione coaleſcit.

Portionem ſphæricam cum cono methodo aliâ comparat *Archimedes*, in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Nam ſphæræ & portionibus ejus convenit, quicquid iſtic de ſphæroide ſphæroidiſque portionibus oſtenditur, reſpectivè.

ARCHI-

Digitized by Google

ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA & CYLINDRO
LIBER SECUNDUS.

Archimedes Doſitheo Salutem.

ANtea quidem mandâſti mihi, Problematum demonſtrationes ſcriberem, quorum ipſe Propoſitiones ad *Cononem* miſeram. Accidit autem eorum complura inter Theoremata ſcribi, quorum priùs ad te miſi demonſtrationes: quòd nempe omnis Sphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eorum qui in Sphæra: quinetiam quòd omnis portionis Sphæræ ſuperficiei æquatur circulus, cujus radius æqualis eſt rectæ à vertice portionis ad baſis circumferentiam ductæ. Præterea quòd omnis Sphæræ cylindrus, baſin quidem habens maximum circulum ex iis, qui in Sphæra, altitudinem verò parem diametro Sphæræ, cum ipſe magnitudine ſeſquialter eſt Sphæræ, tum ſuperficies ejus ſeſquialtera ſuperficiei Sphæræ. *Adhæc verò, quòd omnis ſector ſolidus æqualis eſt cono baſin quidem habenti circulum æqualem ſuperficiei portionis Sphæræ, quæ in ſectore, altitudinem verò parem radio Sphæræ. Quæcunque igitur Theoremata & Problemata ſcripta ſunt *per hæc Theoremata in hoc libro deſcribens ad te tranſmiſi: quæcunque verò per aliam inveniuntur contemplationem, quæ ſc. de Helicibus, & quæ de Conoidibus, propediem adnitar mittere. Problematum autem primum hoc fuit.

* *Pro* ϗ διότι *lego* ϗ δὴ ὅτι.

* *vel* ex his theorematis (deducta ſcilicet)

Prop.

Prop. I.

Sphærâ datâ ſpatium planum invenire æquale ſuperficiei ſphæræ.

Hoc verò manifeſtum eſt, è prædictis Theorematis oſtenſum. Quadruplum enim maximi in ſphæra circuli planum ſpatium eſt, & æquale ſuperficiei ſphæræ.

Prop. II.

Secundum erat: *Dato cono vel cylindro* (A C) *ſphæram invenire cono, vel cylindro parem.* Fig. 50. 51.

Analyſis. Factum ſit; ſit nempe X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C, cujus diameter A B, latus B C. Fiat B C. B D :: 2. 3. quare cylindrus A D [a]ſeſquialter erit cylindri A C, [b]hoc eſt ſphæræ ad diametrum X. ergo cylindrus A D [c]æquatur cylindro, cujus diameter, & altitudo æquantur ipſi X. [d]ergo erit A Bq. Xq :: X. B D. unde B D* $= \frac{\text{X cub.}}{\text{A Bq}}$ at verò A B, X, $\frac{\text{Xq}}{\text{AB}}, \frac{\text{X cub.}}{\text{ABq}}$ ſunt ÷÷. quare componitur ſic: ſit B C $= \frac{2}{3}$ B D. ([a]unde cylindrus A C $= \frac{2}{3}$ cyl A D); & inter A B, B D reperiantur duæ mediæ proportionales X, Y, erit X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C. Nam ſphæra X eſt $\frac{2}{3}$ cylindri, cujus diameter & altitudo æquantur ipſi X; hic autem æquatur cylindro A D; quia eſt X. B D :: A B. Y :: A Bq. Xq. ergo ſphæra ad diametrum X æquatur cylindro A C. *Q. E. F.*

[a] 14. 12.
[b] *hyp.*
[c] 39. 1 *hujus.* & 1 *ax.* 1.
[d] 15. 12.

[a] 14. 12.
[b] 39. 1. *hujus.*

Scholium.

Hoc problema ſolidum eſt, ad ipſius quippe ſolutionem exigens, ut duæ mediæ proportionales inveniantur; quod præſtare nequit Geometria communis, regulâ tantùm utens & circino; per conicas ſectiones, & aliis compluribus modis effici poteſt; de quibus hic taceo.

Prop. III.

Omnis ſphæræ portioni (B V A) *æquatur conus* (B E A) *habens quidem baſim* (B A) *portioni communem, altitudinem verò rectam* (KE), *quæ ad portionis altitudinem* (K V) *eandem rationem habet, quam compoſita è ſphæræ radio* (C V) *& reliquæ portionis altitudine* (KD) *ad reliqua portionis altitudinem* (KD). Fig. 52.

Nam

a *hyp.* Nam ob K E. K V [a]:: K D + C V. K D; erit dividendo V E. K V
:: C V. KD; & permutando V E. C V :: K V. K D; & componen-
b 14. 12. do C E. C V ([b]hoc eſt. con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C E}\end{array}\right.$ con. $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right)$ ::
c 20. 6. D V. K D [c]:: D Vq. D Bq [d]:: V Bq. K Bq :: [e] con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad V B.}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right.$
d 8, & 22. 6.
e 11. 12. con $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right.$ ergo [f] erit con $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt C E}\end{array}\right.$ = con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad V B}\\ \text{alt C V}\end{array}\right.$
f 9. 5.
g 1. & 2 *cor.* 51. *huj.* [g]= port B V A + con B C A. auferatur utrinque con $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad. K B}\\ \text{alt. C K}\end{array}\right.$
h 14. 12. & 3. *ax.* 1. = con B C A; [h]reſtabit con $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ rad K B}\\ \text{alt. K E}\end{array}\right.$ = port. ABC. *Q E. D.*

Si portio major ſit hemiſphærio, idem planè diſcurſus adhibetur, niſi quòd hìc utrinque ſit addendus conus B C A, ſicut iſtic aufertur.

Corollarium.

Hinc facile eſt datæ portioni, ad eandem baſin, æqualem conum conſtituere; faciendo ſc. KD. K D + C V :: K V. K E; eritque K E quæſiti coni altitudo. Tertium Problema hoc erat:

Prop. IV.

Fig. 53. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ſecare, ita ut portionum ſuperficies ad ſe rationem habeant, eandem datæ* (X *ad* Y).

a 2 *cor.* 50. 1 *b.*
b 10. 6.
Quia ſuperficies ſphæricæ [a]ſe habent ut axes; liquet ſi diameter ſphæræ [b]ſecetur ad K, ut ſegmenta V K, K D ſint in ratione X ad Y, & per K ducatur planum B A ad ipſam V D rectum, eſſe ſuperficiem B V A ad ſuperficiem B D A, ut V K ad K D, vel X ad Y; & proinde factum eſſe quod poſtulatur.

Prop. V.

Fig. 54. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ita ſecare, ut portiones ſphæræ rationem habeant eandem datæ* (X *ad* Y).

Analyſis. Factum ſit; ſecet nempe planum B A ſphæram, ita ut portiones B V A, B D A habeant rationem X ad Y; & ſit V D portionum axis; ſintque V D = *d*. *C V = *r*. D K = *a*. unde K V =

*C centrum ſphæræ.

Digitized by Google

a hyp. Nam ob K E. K V ^{a}:: K D + C V. K D; erit dividendo V E. K V
:: C V. KD; & permutando V E. C V :: K V. K D; & componen-
b 14. 12. do C E. C V (^{b}hoc eſt. $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } KB.\\ \text{alt. } CE\end{array}\right.$ $\text{con.}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } KB.\\ \text{alt. } CV.\end{array}\right.$) ::
c 20. 6. d 8, & 22. 6. D V. K D ^{c}:: D Vq. D Bq ^{d}:: V Bq. K Bq :: ^{e} $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } VB.\\ \text{alt. } CV.\end{array}\right.$
e 11. 12. $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } KB\\ \text{alt. } CV.\end{array}\right.$ ergo ^{f} erit $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } KB\\ \text{alt } CE\end{array}\right. = \text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad } VB\\ \text{alt } CV\end{array}\right.$
f 9. 5. g 1. & 2 *cor.* 51. *huj.* ^{g}= port B V A + con B C A. auferatur utrinque $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad. } KB\\ \text{alt. } CK\end{array}\right.$
h 14. 12. & 3. *ax.* 1. = con B C A; ^{h}reſtabit $\text{con}\left\{\begin{array}{l}\text{baſ rad } KB\\ \text{alt. } KE\end{array}\right.$ = port. ABC. *Q. E. D.*

Si portio major ſit hemiſphærio, idem planè diſcurſus adhibetur, niſi quòd hìc utrinque ſit addendus conus B C A, ſicut iſtic aufertur.

Corollarium.

Hinc facile eſt datæ portioni, ad eandem baſin, æqualem conum conſtituere; faciendo ſc. KD. K D + C V :: K V. K E; erítque K E quæſiti coni altitudo. Tertium Problema hoc erat:

Prop. IV.

Fig. 53. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ſecare, ita ut portionum ſuperficies ad ſe rationem habeant, eandem datæ* (X *ad* Y).

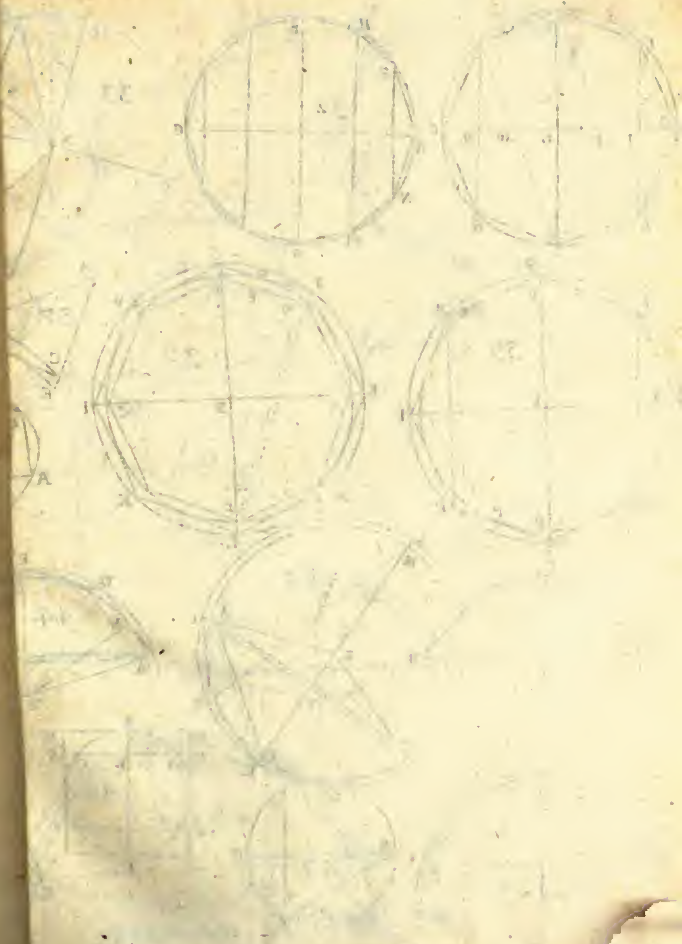
a 2 *cor.* 50. 1 *b.* b 10. 6. Quia ſuperficies ſphæricæ ^{a}ſe habent ut axes; liquet ſi diameter ſphæræ ^{b}ſecetur ad K, ut ſegmenta V K, K D ſint in ratione X ad Y, & per K ducatur planum B A ad ipſam V D rectum, eſſe ſuperficiem B V A ad ſuperficiem B D A, ut V K ad K D, vel X ad Y; & proinde factum eſſe quod poſtulatur.

Prop. V.

Fig. 54. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ita ſecare, ut portiones ſphæræ rationem habeant eandem datæ* (X *ad* Y).

Analyſis. Factum ſit; ſecet nempe planum B A ſphæram, ita ut portiones B V A, B D A habeant rationem X ad Y; & ſit V D portionum axis; ſintque V D = *d.* *C V = *r.* D K = *a.* unde K V =

*C centrum ſphæræ.



Digitized by Google

$2r-a$. Jam ſi D K. D K + C V :: K V. K E, hoc eſt $a. a+r :: 2r-a$. K E $= \frac{2rr+ra-aa.}{a}$ [a]erit conus B E A æqualis portioni BVA. a 3 *hujus.*
Item ſi [a] V K. V K + C V :: K D. K F; hoc eſt $2r-a. 3r-a :: a. \frac{3ra-aa}{2r-a} =$ K, [a]erit conus B F A æqualis portioni B D A. [b] ergo X.Y b *hyp.* & 7.5.
:: con B E A. con B F A [c] :: K E. K F :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}. \frac{3ra-aa}{2r-a}$ ::X. c 14 12.
Y. quare (ducendo in ſe extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{2yrr+yra-yaa}{a}$; & (utrumque latus multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa-xa^3 = 4ry^3-3yraa+ya^3$. & (tranſponendo) $3xraa+3yraa-xa^3-ya^3=4yr^3$. & (utrinque dividendo per $x+y$) $3raa-a^3=\frac{4yr^3}{x+y}=\frac{{}^*yrdd}{x+y}$ (*ſubſtituendo dd pro $4r^2$). & faciendo $x+y. y :: r. p = \frac{yr}{x+y}$, erit $3raa-a^3=pdd$. hoc eſt, æquationem hanc, ad * 4. 2. 1.
analogiſmum redigendo, $3r-a.p :: dd.aa$. hoc eſt C V+K V. $\frac{Y \times CV}{Y+X}$ :: V Dq. D Kq. qui ipſiſſimus eſt analogiſmus ad quem rem deduxit *Archimedes*, (quod, ut hoc obiter moneam, ſatis prodit qualem is analyſin uſurpârit; nam huc eum deveniſſe varias iſtas proportionum compoſitiones, diviſiones, alternationes, & inverſiones, quas oſtentat, adhibendo, penè ſupra fidem ſit: quod ſi feciſſet, caſui potiùs imputandum eſſet, quàm arti, quòd in genuinas inciderit ſolutiones, & hoc ei conſtanter obtigiſſe, vix concipi poteſt.

Ipſum Problema quod attinet, liquet illud eſſe ſolidum, nec in eo genere facillimum effectu; integram pollicetur Author ejus reſolutionem & compoſitionem, at quòd præſtiterit non apparet. Ei ſupplendo defectui nonnullas *Eutocius* bene longas & laborioſas exhibet conſtructiones, per conicarum utique ſectionum occurſus, quas nos omittimus. Præ illis concinnam & expeditam conſtructionem tradit Excellentiſſimus *Hugenius*, in primo Problematum illuſtrium, quam vide sîs; vel adhibeas ipſe generalem *Carteſii* methodum, quam pro conſtruendis hujuſmodi problematis edocet, in Geometriæ ſuæ tertio.) Nos Authoris inſiſtentes veſtigiis ſuppoſitâ hujus analogiſmi effectione, problema ſic componimus.

Fiat

Fiat X + Y. Y :: C V. P ; & ſecetur D V in K, ita ut ſit C V +
K V. P :: V Dq. K Dq. & per K tranſeat planum ipſi V D rectum. Dico
factum. Nam ſit C V + D K. D K :: K E. K V. & C D + V K.
V K :: K F. K D, eritque dividendo C V. D K :: V E. K V. & C D.
V K :: D F. K D. permutandóque C V. V E :: D K. K V :: DF. CD.
inverséque componendo C E. C V (C D) :: C F. D F. & tam antecedentes
quàm conſequentes conjungendo E F. C F :: C F. D F. unde
a 20. 6. E F. D F [a]:: C Fq. D Fq :: D Vq. D Kq (erat enim priùs C D,
D F :: K V. D K ; adeóque componendo C F. D F :: D V. D K).
b conſt. atqui D Vq. K Dq [b] :: C V + K V. P. [c]ergo E F. D F :: C V + KV.
c 11. 5. P. quinetiam fuit C V + V K. V K :: K F. K D ; & converſione rationis
C V + V K. C V :: K F. D F ; ſeu inversè CV. CV + V K ::
d conſt. & 11. 5. D F. K F. ergo ex æquo perturbatè C V. P :: E F. K F. [d] id eſt X +
Y. Y :: E F. K F. & diviſim X. Y :: E K. K F [e] :: con B E A. con BFA
e 14. 12.
f conſt & 3 h. [f] :: port B V A port B D A :: X. Y. *Q.E.F.*

Lemma, pro ſequenti.

Fig. 55. 56. Sint coni D M F, G O I æquales ſimilibus ſphæricis portionibus D E F, G H I (ad eaſdem baſes conſtitutis) ; dico conos hos aſſimilari.

Nam productis axibus M N R, O P T ſint ſphærarum centra Q, S.
& ob portionum ſimilitudinem erit E N. N R :: H P. P T. & antecedentes
dimidiando Q R. N R :: S T. P T. componendóque Q R +
a 3 hujus. N R. N R :: S T + P T. P T. [a] hoc eſt M N. E N :: O P. H P. at
b 24 def. 11. rurſus, ob portionum ſimilitudinem, eſt E N. N D :: H P. P G. ergo
ex æquali M N. N D :: O P. P G. [b]ergo coni D M F, G O I ſunt ſimiles.
Q.E.D.

Prop. VI.

Fig. 57. *Datæ ſphæræ portioni* (D E F) *ſimilem, alterique datæ* (A B C) *æqualem conſtituere.*

Analyſis. Sit G H I portio quæſita, fiántque coni A K C, D M F,
G O I æquales portionibus A B C, D M F, G O I, ſingulæ ſingulis
a 1. ax. 1. ordine. [a] Quare con G O I = con A K C. & [b]idcirco A Cq. G Iq ::
b 15. 12.
* c lemm præc. P O. L K. * unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO$. Item ob [c] ſimilitudinem conorum
d 24 def. 11.
e 7. 5. D M F, G O I [d] eſt DF. NM :: GI. PO :: [e] GI. $\frac{ACQ \times LK}{GIq}$
:: G I

:: G I cub.A Cq $\times$ L K. quare $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} = $ G I cub.&(dividendo per A Cq) $\frac{DF \times LK}{NM} = \frac{GI\,cub}{ACq}$.atqui AC,GI,$\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI\,cub}{ACq}$ ſunt ∺. ergo G I eſt prima duarum inter A C, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

Vides & hoc problema eſſe ſolidum, utpote quod deſideret inventionem duarum mediarum proportionalium; quâ ſuppoſitâ ſic conſtruetur. [a]Fiant coni A K L, D M F pares datis portionibus A B C, *a 3 hujus.*
D E F. ſitque M N. K L :: D F. Z $= \frac{KL \times DF}{MN}$. & inter A C, Z
reperiantur proportione mediæ G I, & X. Circa G I verò deſcribatur portio circularis G H I continens angulum G H I = ang D E F. b 33. 3.
erit portio G H I, quam quæris. Nam faciendo conum G O I parem
portioni G H I, quia portiones G H I, D E F [c] ſimiles ſunt, [d] erunt & c *conſtr.*
coni G O I, D M F ſimiles. quare P O. G I [e]:: M N. D F :: [f] K L. d *lemm. prac.*
Z. & permutando P O. K L :: G I. Z [f]:: A C. X [g] :: A Cq. G I q. e 24 *def.* 11.
([h]ſc. ob A C, G I, X, Z ∺). itaque reciprocam habent coni G O I, f *conſt* & 16.5.
A C K baſium & altitudinum proportionem; [k] ergo coni G O I, A C K g 20. 6.
(hoc eſt portiones G H I, A B C) æquantur. *Q.E.F.* h *conſt.*
k 15.12.

Prop. VII.

Datis duabus ſphæræ portionibus (A B C, D E F) [*ſive ejuſdem, ſive* Fig. 58.
non] *invenire ſphæræ portionem, quæ quidem datarum uni* (D E F) *ſimi-* 59.
lis erit, ſuperficiem verò habebit alterius portionis (A B C) *ſuperficiei* 60.
parem.

Analyſis. Sit portio G H I qualis exponitur. unde cùm portionum G H I, A B C ſuperficies æquentur, [a]erit circulus radio H I æqua- a 49 & 50. 1 *b.*
lis circulo ad radium B C; & proinde H I = B C. Item ob ſimilitudinem ſuperficierum D E F, G H I, erit E F. E R :: H I (vel B C).
H T: hinc Syntheſis. Fac E F. E R :: B C. H T. & ſit H T diameter ſphæræ; & ſecetur H T in P, [d] ita ut ſit H P. P T :: E N. N R; d 10. 6.
& per P tranſeat planum G I ad H T rectum: liquet portionem e *conſt.* & *cor.*
G H I fore ſimilem ipſi D E F; & eſſe H I. H T [e] :: E F. E R [f] :: 8. 6.
B C. H T. adeóque eſſe H I = B C. & idcirco circulum radio H I f *conſt.*
[g] æquari circulo ad radium B C; [h] hoc eſt ſuperficiem ſphæricam g 9. 5.
G H I ſuperficiei A B C. *Q.E.F.* h 49. & 50. 1 *b.*

Prop. VIII.

Fig 61.

A data ſphæra (B V A D) *plano abſcindere portionem* (B V C), *ita ut portio ad conum* (B V C) *habentem eandem cum portione baſim* (B A) *& æqualem altitudinem* (V K) *habeat rationem datam* (X *ad* Y).

Quæſita portio ſit B V A, & conus B V A; quibus axis communis V K; in quo protracto centrum ſphæræ, C; ponatur autem conus B E A æqualis portioni B V A; [a] unde C D + K D. K D :: E K. V K [b] :: con B E A, B V A [c] :: X. Y. dividendóque X—Y. Y :: C D. K D. unde componitur ſic: fiat X—Y. Y :: C D. K D. (adeóque componendo erit X. Y :: CD + KD. KD); per K verò tranſeat planum B A ad V D rectum; túmque ſi fiat conus æqualis reſectæ portioni B V A, erit E K. V K ([a] id eſt con B E A. con B V A) [b] :: C D + K D. K D [c] :: Y. X. [d] adeóque port. B V A. con B V A :: Y. X. *Q.E.F.*

[a] 3 *hujus.*
[b] 14. 12.
[c] *conſt.* & 7. 5.

[a] 14. 12.
[b] 3. *hujus.*
[c] *prius.*
[d] *conſt.* & 7. 5.

Lemma.

Sint utcunque A ⊏ B, & C ⊏ D. Erit A + D. B + D. ⊏ A + C. B + C.

Nam A ×: C—D ⊏ B ×: C—D; hoc eſt A C—A D ⊏ B C—B D. & tranſponendo A C + B D ⊏ B C + A D. ergo utrinque adjungendo A B + C D, erit A C + BD + A B + C D ⊏ B C + A D + A B + C D, [a] hoc eſt A + D ×: B + C ⊏ B + D × A + C. * quare A + D. B + D ⊏ A + C. B + C.

[a] *ſch.* 1 2.
* *ſch.* 16. 6.

Prop. IX.

Fig. 62.

Si ſphæra (B V A D) *plano ſecetur non per centrum, major portio* (B V A) *ad minorem* (B D A) *rationem quidem habet minorem quàm* **duplam ejus, quam habet majoris portionis ſuperſicies ad ſuperficiem minoris; majorem verò quàm ſeſquialteram.*

Sit conus B E A = port. B V A. & conus B F A = port. B D A. [a] quare C D + K D. K D :: E K. V K. & dividendo C D. K D :: E V. V K [b] ⊏ V K. C D (quia C Dq [c] ⊏ K D × V K) [d] ergo E V ⊏ V K, & E V × C D [b] ⊏ V Kq. [e] Eſt verò C D + V K. K F [f] :: V K. K D :: E V. C D * ⊏ E V + V K—C D + V K (E K. C D + V K). [g] ergo Qu: C D + V K ⊏ K F × E K. & [h] proinde Q: C D + V K. K Fq ⊏ K F × E K. K Fq. [k] hoc eſt V Kq. K Dq ⊏ E K. K F, hoc

[a] 3 *hujus.*
* διπλάσιον.
[b] *ſch.* 17. 6.
[c] 5. 2.
[d] 14. 5.
[e] 3 *h.* & 16. 5.
[f] *prius* & 15. 6.
[g] — 5.
[h] 8. 5.
[k] *ſup.* & 1. 6.

eſt [l] duplicata ratio ſuperficierum BVA. BDA major eſt [m] ratione conorum BEA, BFA; vel portionum BVA, BFA. quod erat primum.

Porro fiat Xq = EV × CD [p] ⊏ VKq; & quia EV. X [q] :: X. CD; [r] erit EV + X. X + CD :: X. CD. [s] ergo Qu: EV + X. Qu: X + CD :: Xq. CDq [t] :: EV. CD. verùm EV + VK. CD + VK [u] ⊏ EV + X. CD + X. (quia $\frac{EK}{EV \sqsubset CD}$ & X [x] ⊏ VK). ergo EKq. Qu. CD + VK. ⊏ EV. CD [x] :: CD + VK. KF. pone Z, CD + VK, Y, KF eſſe ÷÷, ergo Zq. Qu: CD + VK [t] :: Z. Y [y] :: CD + VK. KF [x] ⊐ EKq. Qu: CD + VK. [z] quare Z ⊐ EK. atqui ratio Z ad KF [α] ſeſquialtera eſt rationis CD + VK ad KF. [β] ergo ratio EK ad KF ([γ] hoc eſt coni BEA ad conum BFA, [δ] vel portionis BVA ad portionem BDA) major eſt ſeſquialterâ rationis CD + VK ad KF, [x] vel VK ad KD, [ε] hoc eſt ſuperficiei ſphæricæ BVA ad BDA. ergo ſecundò quoque propoſitum conſtat.

l 3 *cor.* 50 *huj.*
m 14. 12.
p *ſupra.*
q 17. 6.
r 16. & 18 5.
s 22. 6.
t 20. 6.
u *lemm. præc.*
x *ſupra.*
y 16. 5.
z 10. 5.
α *conſt.*
β 8. 5.
γ 14. 12.
δ *conſt.* & 7. 5.
ε 3 *cor.* 50 *h.*

Prop. X.

Sphæricarum portionum (ABC, DEF) *ſub æquali ſuperficie contentarum maximum eſt hemiſphærium* (ABC).

Fig. 63, 64.

Sint coni AGC, DHF æquales portionibus ABC, DEF. quare KG [a] = 2KA. [b] & EM + LO. LO :: LH. LE. ſit M centrum ſphæræ DEF, & EN = BK. ergo 2ENq = 2KAq [c] = BAq [d] = EDq [e] = OE × EL [f] = 2EM × EL; quare ENq [g] = EM × EL. ergo EN media cadit inter puncta M, L; unde EN × NO [h] ⊏ EL × LO. Additis igitur hinc inde æqualibus ENq, & EM × EL; erit EN × EO ([k] hoc eſt EN × NO + ENq) ⊏ EL × LO + EM × EL [l] = LH × LO. [m] ergo EN. LH ⊏ LO. EO [o] :: ODq. EOq [p] :: DLq. EDq [q] :: DLq. 2KAq. & antecedentes duplicando 2EN (KG). LH ⊏ 2DLq. 2KAq [r] :: DLq. KAq. Ponatur igitur KZ. LH :: DLq. KAq. [s] eritque KZ ⊐ KG; [t] & ideo conus AZC ⊐ con AGC. [u] hoc eſt conus DHF minor cono AGC, [x] vel portio DEF minor portione ABC. *Q.E.D.*

a *cor.* 38. 1 *b.*
b 3 *hujus.*
c 47. 1.
d *hyp.* 1. & 49 *vel* 50 *hujus.*
e *cor.* 8. & 17. 6.
f *conſt.* & 1. 2.
g 6. *ax.* 1.
h *cor.* 5. 2.
k 3. 2.
l *ſupra* & 16. 6.
n *ſch.* 16 6.
o *cor.* 8 *et* 20. 6.
p *cor.* 8. *et* 22 6.
q *ſupra* & 7. 5.
r 15. 5.
s 10. 5. t 14. 12. & 14. 5. u 15. 12. x *conſt.*

Digitized by Google

De CIRCULI *Dimenſione.*

Lemma.

Fig. 65. POlygonum ordinatum G H I K L M circulo circumſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò radius N P.

Nam radius N P ad contactum ductus tangenti G H perpendicularis eſt ; & ſi ductis rectis N G, N H, N I, N K, N L, N M polygonum reſolvatur in triangula, erit radius N P communis omnium altitudo, [a] proindeque triangula ipſa æqualia erunt ; [a] ergo triangulum baſin habens parem ſummæ laterum G H, H I, I K &c. altitudinem verò N P æquabitur illis omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto.

a 1. 6.

Similiter polygnum A B C D E F inſcriptum circulo æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis N O è centro in unum aliquod latus ducta.

Prop. I.

In fig. præced. Fig. 66. *Omnis circulus* (N) *æqualis eſt triangulo* (Q R S), *cujus radius* (N P) *æqualis eſt uni lateri* (Q R) *circa rectum angulum, perimeter verò baſi* (R S).

b 1. 1. *de ſph. & cyl.* Si negas ſit primò triang Q R S $\sqsupset \odot$ N. Circulo N [a] inſcribatur polygonum ordinatum A B C D E F, ita ut $\odot$ N — polyg ABCDEF $\sqsupset \odot$ N — triang Q R S ; quare polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang QRS ; & quoniam ambitus polygoni [b] minor eſt perimetro circuli, hoc eſt ipſâ R S, ſit ei æqualis R T ; & connectatur Q T ; cùm itaque ſit R Q $\sqsubset$ N O, [c] erit polyg A B C D E F $\sqsupset$ triang Q R T $\sqsupset$ QRS. verùm erat polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang Q R S, quæ repugnant.

c *lemm. præc.*

d 2. 1. *de ſph. & cyl.* Sin velis eſſe triang Q R S $\sqsubset \bigcirc$ N ; circulo circumſcribatur polygonum G H I K L M [a] $\sqsupset$ triang Q R S ; [d] ejus perimeter circuli perimetro major eſt, ſit æqualis R V, & connectatur Q V ; [c] ergo polyg G H I K L M $=$ triang Q R V $\sqsubset$ triang Q S R ; at erat polyg G H I K L M $\sqsupset$ triang Q R S, quæ repugnant.

Ergo

Ergò potiùs circulus triangulo QRS æquatur; *Q. E. D.*

Breviùs. Circulus eſt quaſi polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius eſt perpendicularis ad latera, peripheria verò ſumma laterum; unde conſtat è præmiſſo lemmate propoſitum.

Coroll. Si circumferentia dicatur ϖ, diameter δ, radius r, erit $\odot = \frac{r\varpi}{2} = \frac{\varpi}{\delta} rr$.

Lemma. Sit $A.B \sqsubset C.D$; & $B = D$; erit $A \sqsubset C$. Nam ſit a 10. 5.
$A.E :: C.D.$ [a]ergò $E \sqsubset B$; hoc eſt $E \sqsubset D$; [b]quare $A \sqsubset C$. b 14. 5.

prop. II.

Omnis circuli perimeter (ϖ) *tripla eſt diametri* (AD, *vel* δ), *& præterea excedit minori quidem quàm* $\frac{1}{7}$ (*vel* $\frac{10}{70}$), *majori verò quàm* $\frac{10}{71}$ *diametri.*

Pars prima.

Dico fore $\varpi.\delta \sqsupset 3\frac{1}{7}.1$. Ducatur tangens AD; ſitque $\frac{1}{3}$ rect $=$ Fig. 67
$\angle ACD = 2 \angle ACE = 4 \angle ACF = 8 \angle ACF = 16 \angle ACH = 32 \angle ACK$. quare 2 ang $ACK = \frac{1}{96}\,4$ rect; unde $2AK \times 96$ eſt ambitus polygoni circulo circumſcriptibilis, circulo circumferentia major; itaque ſi $2AK \times 96 \sqsupset 3\frac{1}{7}\,AB$, *liquet * 8. 5.
hæc pars; id verò ſic oſtenditur:

Ob ang $ACE = \frac{1}{3}$ rect. eſt CE [a]$= 2EA$; & ob ang. ACE a 3 cor. 12.13.
$= 2ACF$, eſt $CE.CA$ [b]$:: EF.FA$; & componendo $CE +$ b 3.6.
$CA.CA :: EA.FA$; permutandóque $CE + CA.EA :: EA.FA$:
ſimili diſcurſu eſt

$$\left.\begin{matrix} CF \\ CG \\ CH \end{matrix}\right\} + CA. \begin{matrix} FA \\ GA \\ HA \end{matrix} :: CA. \left\{\begin{matrix} GA. \\ HA. \\ KA. \end{matrix}\right.$$

Ponatur $CE = 306$; quare $EA = 153$, ac [c]$CA\ (\sqrt{CEq - EAq}) = \sqrt{93636 - 23409} = \sqrt{70227} \sqsubset \sqrt{70225} = 265$. [d]ergo $571\ (306 + 265).\ 153. \sqsupset CE + CA.EA :: CA.FA$; c 47. 1. d 8. 5.
itaque poſito $FA = 153 = \sqrt{23409}$, [e]erit $CA \sqsubset 571 = \sqrt{326041}$; adeóque $CFq \sqsubset 23409 + 326041 = 349450 \sqsubset 349428\frac{42}{64} = q.\ 591\frac{1}{8}$. e lemm. præc.

Hinc $1162\frac{1}{8}\ (591\frac{1}{8} + 571).\ 153$ [d]$\sqsupset CF + CA.FA :: CA.GA$; quare poſito jam $GA = 153$, [e]erit $CA \sqsubset 1162\frac{1}{8} = \sqrt{1350534\frac{21}{64}}$; & ideo $CGq \sqsubset 23409 + 1350534\frac{21}{64} = 1373943\frac{21}{64} \sqsubset 1373720\frac{42}{64} = q.\ 1172\frac{1}{8}$.

Igi-

Digitized by Google

Igitur $2334\frac{1}{4}$ ($1172\frac{1}{8}$ + $1162\frac{1}{8}$). 153 [d] ⊐ CG + CA. GA :: CA. HA; ergo ſi rurſus ponatur HA = 153; [e] erit CHq ⊏ q. 153 + q. $2334\frac{1}{4}$ = 23409 + $5448723\frac{1}{16}$ = $54721321\frac{1}{16}$ ⊏ $5472028\frac{1}{16}$ = q. $2339\frac{1}{4}$. Itaque denuo $4673\frac{1}{2}$ ($2339\frac{1}{4}$ + $2334\frac{1}{4}$). 153 [d] ⊐ CH + CA. HA :: CA. KA; ergo ſi ponatur KA = 153, [e] erit CA ⊏ $4673\frac{1}{2}$; quare AB. 2KA ⊏ $4673\frac{1}{2}$. 153.
f 15. 5. vel inversè 2 KA. AB ⊐ 153. $4673\frac{1}{2}$. [f] ergo 94 × 2KA. AB ⊐ 94 × 153. $4673\frac{1}{2}$; hoc eſt ⊐ 14688. $4673\frac{1}{2}$ ⊐ $14688\frac{6}{7}$. $4673\frac{1}{2}$ :: $3\frac{1}{7}$. 1. quare liquet prima pars.

Pars ſecunda.

Dico fore π. δ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. Sit $\frac{1}{6}$ π = arc AD = 2 arc AE = 4 arc AF = 8 arc AG = 16 arc AH; quare AH ≐ $\frac{1}{96}$ π; unde 96 AH eſt ambitus inſcriptibilis polygoni perimetro circuli minor;
* 8. 5. quòd ſi igitur ſit 94 AH. AB. ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1; * liquebit fore magis π. δ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. illud verò ſic conſtat.

Fig. 58. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; & ob ang ABD = 2 ABE, eſt DB. BA [h] :: DX. KA; &
h 3. 6. componendo DB + BA. BA :: DA. KA; permutandóque DB
k 4. 6. + BA. DA :: BA. KA [k] :: BE. EA. (nam ob [l] ſimilia triangula
l 27. 3. EBA, EAK eſt BA. KA [h] :: BE. EA).

$$\text{Simili diſcurſu eſt}\ \left.\begin{matrix}\text{EB}\\ \text{FB}\\ \text{GB}\end{matrix}\right\}+\text{BA}.\ \begin{matrix}\text{EA}.\\ \text{FA}.\\ \text{GA}.\end{matrix}\ ::\ \begin{matrix}\text{BF. FA.}\\ \text{BG. GA.}\\ \text{BH. HA.}\end{matrix}$$

Sit BA = 1560. ergo CA (DA) = 780; & DBq (BAq —
m 8. 5. AD q) = 1825200 ⊐ 1825201 = q. 1351. [m] ergo 2911 (1560 + 1351). 780 ⊏ DB + BA. DA :: BE. EA; quare ſi pona-
n lemm. prac. tur EA = 780, [n] erit BE ⊐ 2911; & BAq (BEq + EAq) ⊐ 9082321 ⊐ q. $3013\frac{3}{4}$.

[m] Quare $5924\frac{3}{4}$ (2911 + $3013\frac{3}{4}$). 780. (hoc eſt 1823. 240) ⊏ EB + BA. EA :: BF. FA; unde ſi FA ponatur 240, [n] erit BF ⊐ 1823. & BAq (FAq + BFq) ⊐ 3380929 ⊐ q. $1838\frac{9}{11}$.

Unde iterum $3661\frac{9}{11}$ (1823 + $1838\frac{9}{11}$). 240 (hoc eſt 1007. 66) [m] ⊏ FB + BA. FA :: BG. GA; quare poſito GA = 66, [n] erit BG ⊐ 1007; & BAq (GAq + BGq) ⊐ 1018405 ⊐ q 1009$\frac{1}{6}$.

Itaque denuo $2016\frac{1}{6}$ (1007 + $1009\frac{1}{6}$). 66 [m] ⊏ GB + BA. GA :: BH. HA; unde ſi ponatur HA = 66, [n] erit BH ⊐ $2016\frac{1}{6}$; & BAq (HAq + BHq) ⊐ $4069284\frac{1}{36}$ ⊐ q. $2017\frac{1}{4}$. ergo BA.

$AH \sqsupset 2017\frac{1}{4}.66$; vel inversè $AH.BA \sqsubset 66.2017\frac{1}{4}$. [p] quare p 15.5. $96\,AH.BA \sqsubset 94 \times 66.2017\frac{1}{4}$ (hoc eſt, $6336.2017\frac{1}{4} :: 3\frac{1057}{8071}.1.$) quare $96\,AH.BA \sqsubset 3\frac{1057}{8071}.1 \sqsubset 3\frac{10}{71}.1.$ unde conſtat propoſitum.

Coroll. Hinc $\varpi.\delta :: 22.7$, ferè.

Prop. III.

Circulus ad ſuæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè), quam 11 *ad* 14.

Nam $\delta\varpi.\delta\delta$ [a] $:: \varpi.\delta$ [b] $:: 22.7.$ ergo $\frac{\delta\varpi}{4}(\odot).\delta\delta :: \frac{22}{4}.7 :: \frac{44}{4}.14$ (hoc eſt) $:: 11.14.$ a 1.6. b cor. 2. huj.

Cyclometriam longiùs, & ad majorem *ἀκρίβειαν* promovit poſteriorum induſtria. Conſulantur *Vieta*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad craſſiores ſaltem uſus ſufficit hæc *Archimedea* Circuli dimenſio.

Prop. VIII.

Fig 61. *A data ſphæra* (B V A D) *plano abſcindere portionem* (B V C), *ita ut portio ad conum* (B V C) *habentem eandem cum portione baſim* (B A) *& æqualem altitudinem* (V K) *habeat rationem datam* (X *ad* Y).

Quæſita portio ſit B V A, & conus B V A; quibus axis communis V K; in quo protracto centrum ſphæræ, C; ponatur autem conus
a 3 *hujus.* B E A æqualis portioni B V A; [a] unde C D + K D. K D :: E K.
b 14. 12. V K [b] :: con B E A, B V A [c] :: X. Y. dividendóque X—Y. Y :: C D.
c *conſt.* & 7. 5. K D. unde componitur ſic: fiat X—Y. Y :: C D. K D. (adeóque componendo erit X. Y :: CD + KD. KD); per K verò tranſeat planum B A ad V D rectum; túmque ſi fiat conus æqualis reſectæ portioni
a 14. 12. B V A, erit E K. V K ([a] id eſt con B E A. con B V A) [b] :: C D +
b 3. *hujus.* K D. K D [c] :: Y. X. [d] adeóque port. B V A. con B V A :: Y. X.
c *prius.*
d *conſt.* & 7. 5. *Q.E.F.*

Lemma.

Sint utcunque A ⊏ B, & C ⊏ D. Erit A + D. B + D. ⊏ A + C. B + C.

Nam A ×: C—D ⊏ B ×: C—D; hoc eſt A C—A D ⊏ B C—B D. & tranſponendo A C + B D ⊏ B C + A D. ergo utrinque adjungendo A B + C D, erit A C + B D + A B + C D ⊏ B C
a *ſch.* 1 2. + A D + A B + C D, [a] hoc eſt A + D ×: B + C ⊏ B + D ×
* *ſch.* 16. 6. A + C. * quare A + D. B + D ⊏ A + C. B + C.

Prop. IX.

Fig. 62. *Si ſphæra* (B V A D) *plano ſecetur non per centrum, major portio* (B V A) *ad minorem* (B D A) *rationem quidem habet minorem quàm *duplam ejus, quam habet majoris portionis ſuperficies ad ſuperficiem minoris; majorem verò quàm ſeſquialteram.*

a 3 *hujus.* Sit conus B E A = port. B V A. & conus B F A = port. B D A.
* *διπλάσιον.* [a] quare C D + K D. K D :: E K. V K. & dividendo C D. K D :: E V.
b *ſch.* 17. 6. V K [b] ⊏ V K. C D (quia C Dq [c] ⊏ K D × V K) [d] ergo E V ⊏ V K,
c 5. 2.
d 14. 5. & E V × C D [b] ⊏ V Kq. [e] Eſt verò C D + V K. K F [f] :: V K. K D
e 3 *h.* & 16. 5. :: E V. C D * ⊏ E V + V K—C D + V K (E K. C D + V K).
f *prius* & 15. 6. [b] ergo Qu: C D + V K ⊏ K F × E K. & [h] proinde Q: C D + V K.
* —5.
h 8. 5. K Fq ⊏ K F × E K. K Fq. [k] hoc eſt V Kq. K Dq ⊏ E K. K F, hoc
k *ſup.* & 1. 6. eſt

eſt [l] duplicata ratio ſuperficierum BVA. BDA major eſt [m] ratione conorum BEA, BFA; vel portionum BVA, BFA. quod erat primum.

Porro fiat Xq = EV × CD [p] ⊏ VKq; & quia EV. X [q] ∷ X. CD; [r] erit EV + X. X + CD ∷ X. CD. [s] ergo Qu: EV + X. Qu: X + CD ∷ Xq. CDq [t] ∷ EV. CD. verùm EV + VK. CD + VK [u] ⊏ EV + X. CD + X. (quia $\frac{EK}{EV \sqsubset CD}$ & X [x] ⊏ VK). ergo EKq. Qu. CD + VK. ⊏ EV. CD [x] ∷ CD + VK. KF. pone Z, CD + VK, Y, KF eſſe ÷÷, ergo Zq. Qu: CD + VK [t] ∷ Z. Y [y] ∷ CD + VK. KF [x] ⊐ EKq. Qu: CD + VK. [z] quare Z ⊐ EK. atqui ratio Z ad KF [α] ſeſquialtera eſt rationis CD + VK ad KF. [ϐ] ergo ratio EK ad KF ([γ] hoc eſt coni BEA ad conum BFA; [δ] vel portionis BVA ad portionem BDA) major eſt ſeſquialterâ rationis CD + VK ad KF, [x] vel VK ad KD, [ε] hoc eſt ſuperficiei ſphæricæ BVA ad BDA. ergo ſecundò quoque propoſitum conſtat.

l 3 *cor.* 50 *huj.*
m 14. 12.
p *ſupra.*
q 17. 6.
r 16. & 18. 5.
s 22. 6.
t 20. 6.
u *lemm. præc.*
x *ſupra.*
y 16. 5.
z 10. 5.
α *conſt.*
ϐ 8. 5.
γ 14. 12.
δ *conſt.* & 7. 5.
ε 3 *cor.* 50 *b.*

Prop. X.

Sphæricarum portionum (ABC, DEF) *ſub æquali ſuperficie contentarum maximum eſt hemiſphærium* (ABC).

Fig. 63, 64.

Sint coni AGC, DHF æquales portionibus ABC, DEF. quare KG [a] = 2KA. [b] & EM + LO. LO ∷ LH. LE. ſit M centrum ſphæræ DEF, & EN = BK. ergo 2ENq = 2KAq [c] = BAq [d] = EDq [e] = OE × EL [f] = 2EM × EL; quare ENq [g] = EM × EL. ergo EN media cadit inter puncta M, L; unde EN × NO [h] ⊏ EL × LO. Additis igitur hinc inde æqualibus ENq, & EM × EL; erit EN × EO ([k] hoc eſt EN × NO + ENq) ⊏ EL × LO + EM × EL [l] = LH × LO. [m] ergo EN. LH ⊏ LO. EO [o] ∷ ODq. EOq [p] ∷ DLq. EDq [q] ∷ DLq. 2KAq. & antecedentes duplicando 2EN (KG). LH ⊏ 2DLq. 2KAq [r] ∷ DLq. KAq. Ponatur igitur KZ. LH ∷ DLq. KAq. [s] eritque KZ ⊐ KG; [t] & ideo conus AZC ⊐ con AGC. [u] hoc eſt conus DHF minor cono AGC, [x] vel portio DEF minor portione ABC. *Q.E.D.*

a *cor.* 38. 1 *b.*
b 3 *hujus.*
c 47. 1.
d *hyp.* 1. & 49 *vel* 50 *hujus.*
e *cor.* 8. & 17. 6.
f *conſt.* & 1. 2.
g 6. *ax.* 1.
h *cor.* 5. 2.
k 3. 2.
l *ſupra* & 16. 6.
n *ſch.* 16. 6.
o *cor.* 8 *et* 20. 6.
p *cor.* 8. *et* 22. 6.
q *ſupra* & 7. 5.
r 15. 5.
s 10. 5. t 14. 12. & 14. 5. u 15. 12. x *conſt.*

De Circuli Dimenſione.

Lemma.

Fig. 65.

POlygonum ordinatum G H I K L M circulo circumſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò radius N P.

a 1. 6.

Nam radius N P ad contactum ductus tangenti G H perpendicularis eſt; & ſi ductis rectis N G, N H, N I, N K, N L, N M polygonum reſolvatur in triangula, erit radius N P communis omnium altitudo, [a] proindeque triangula ipſa æqualia erunt; [a] ergo triangulum baſin habens parem ſummæ laterum G H, H I, I K &c. altitudinem verò N P æquabitur illis omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto.

Similiter polygnum A B C D E F inſcriptum circulo æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis N O è centro in unum aliquod latus ducta.

Prop. I.

In fig. præced.
Fig. 66.

Omnis circulus (N) *æqualis eſt triangulo* (Q R S), *cujus radius* (N P) *æqualis eſt uni lateri* (Q R) *circa rectum angulum, perimeter verò baſi* (R S).

b 1. 1. de ſph. & cyl.
c lemm. præc.

Si negas ſit primò triang Q R S ⊐ ⊙ N. Circulo N [a] inſcribatur polygonum ordinatum A B C D E F, ita ut ⊙ N — polyg ABCDEF ⊐ ⊙ N — triang Q R S; quare polyg A B C D E F ⊏ triang QRS; & quoniam ambitus polygoni [b] minor eſt perimetro circuli, hoc eſt ipsâ R S, ſit ei æqualis R T; & connectatur Q T; cùm itaque ſit R Q ⊏ N O, [c] erit polyg A B C D E F ⊐ triang Q R T ⊐ QRS. verùm erat polyg A B C D E F ⊏ triang Q R S, quæ repugnant.

d 2. 1. de ſph. & cyl.

Sin velis eſſe triang Q R S ⊏ ⊙ N; circulo circumſcribatur polygonum G H I K L M [a] ⊐ triang Q R S; [d] ejus perimeter circuli perimetro major eſt, ſit æqualis R V, & connectatur Q V; [c] ergo polyg G H I K L M = triang Q R V ⊏ triang Q S R; at erat polyg G H I K L M ⊐ triang Q R S, quæ repugnant.

Ergo

Ergò potiùs circulus triangulo QRS æquatur ; *Q. E. D.*

Breviùs. Circulus eſt quaſi polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius eſt perpendicularis ad latera, peripheria verò ſumma laterum ; unde conſtat è præmiſſo lemmate propoſitum.

Coroll. Si circumferentia dicatur π, diameter δ, radius r, erit $\odot = \frac{r\pi}{2} = \frac{\pi}{\delta} rr$.

Lemma. Sit $A . B \sqsubset C . D$; & $B = D$; erit $A \sqsubset C$. Nam ſit a 10. 5.
$A . E :: C . D$. [a]ergò $E \sqsubset B$; hoc eſt $E \sqsubset D$; [b]quare $A \sqsubset C$. b 14. 5.

prop. II.

Omnis circuli perimeter (π) tripla eſt diametri (AD, *vel* δ), *& præterea exceait minori quidem quàm* $\frac{1}{7}$ (*vel* $\frac{10}{70}$), *majori verò quàm* $\frac{10}{71}$ *diametri.*

Pars prima.

Dico fore $\pi . \delta \sqsupset 3\frac{1}{7} . 1$. Ducatur tangens AD ; ſitque $\frac{2}{3}$ rect $= \angle ACD = 2 \angle ACE = 4 \angle ACF = 8 \angle ACF = 16 \angle ACH = 32 \angle ACK$. quare 2 ang $ACK = \frac{1}{96} 4$ rect ; unde $2AK \times 96$ eſt ambitus polygoni circulo circumſcriptibilis, circulo circumferentia major ; itaque ſi $2AK \times 96 \sqsupset 3\frac{1}{7} AB$, [*]liquet hæc pars ; id verò ſic oſtenditur : Fig. 67 * 8. 5.

Ob ang $ACE = \frac{1}{3}$ rect. eſt CE [a]$= 2EA$; & ob ang. $ACE = 2ACF$, eſt $CE . CA$ [b]$:: EF . FA$; & componendo $CE + CA . CA :: EA . FA$; permutandóque $CE + CA . EA :: EA . FA$: ſimili diſcurſu eſt a 3 cor. 12. 13. b 3. 6.

$$\left.\begin{matrix} CF \\ CG \\ CH \end{matrix}\right\} + CA . \begin{matrix} FA \\ GA \\ HA \end{matrix} :: CA . \left\{\begin{matrix} GA. \\ HA. \\ KA. \end{matrix}\right.$$

Ponatur $CE = 306$; quare $EA = 153$, ac [c]CA ($\sqrt{CEq - EAq}$) $= \sqrt{93636 - 23409} = \sqrt{70227} \sqsubset \sqrt{70225} = 265$. [d]ergo $571 (306 + 265) . 153 . \sqsupset CE + CA . EA :: CA . FA$; itaque poſito $FA = 153 = \sqrt{23409}$, [e]erit $CA \sqsubset 571 = \sqrt{326041}$; adeóque $CFq \sqsubset 23409 + 326041 = 349450 \sqsubset 349428 \frac{42}{64} = q. 591\frac{1}{8}$. c 47. 1. d 8. 5. e lemm. præc.

Hinc $1162\frac{1}{8} (591\frac{1}{8} + 571) . 153$ [d]$\sqsupset CF + CA . FA :: CA . GA$; quare poſito jam $GA = 153$, [e]erit $CA \sqsubset 1162\frac{1}{8} . = \sqrt{1350534\frac{21}{64}}$; & ideo $CGq \sqsubset 23409 + 1350534\frac{21}{64} = 1373943\frac{21}{64} \sqsubset 1373720\frac{42}{64} = q. 1172\frac{1}{8}$.

Igitur $2334\frac{1}{4}$ $(1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}).\ 153$ [d] $\sqsupset$ CG + CA. GA ::
CA. HA; ergo ſi rurſus ponatur HA = 153; [e] erit CHq $\sqsubset$
q. 153 + q. $2334\frac{1}{4} = 23409 + 5448723\frac{1}{16} = 54721321\frac{1}{16}$
$\sqsubset 5472028\frac{1}{16}$ = q. $2339\frac{1}{4}$. Itaque denuo $4673\frac{1}{2}$ $(2339\frac{1}{4} +$
$2334\frac{1}{4}).\ 153$ [d] $\sqsupset$ CH + CA. HA :: CA. KA; ergo ſi ponatur KA
= 153, [e] erit CA $\sqsubset 4673\frac{1}{2}$; quare AB. 2KA $\sqsubset 4673\frac{1}{2}.\ 153.$
f 15. 5. vel inversè 2 KA. AB $\sqsupset 153.\ 4673\frac{1}{2}$. [f] ergo 94 × 2KA. AB $\sqsupset$
94 × 153. $4673\frac{1}{2}$; hoc eſt $\sqsupset 14688.\ 4673\frac{1}{2} \sqsupset 14688\frac{6}{7}.\ 4673\frac{1}{2}$ ::
$3\frac{1}{7}.\ 1$. quare liquet prima pars.

Pars ſecunda.

Dico fore $\pi.\ \delta \sqsubset 3\frac{10}{71}.\ 1$. Sit $\frac{1}{6}\ \pi$ = arc AD = 2 arc AE =
4 arc AF = 8 arc AG = 16 arc AH; quare AH $\doteq \frac{1}{96}\ \pi$; unde
96 AH eſt ambitus inſcriptibilis polygoni perimetro circuli minor;
* 8. 5. quòd ſi igitur ſit 94 AH. AB. $\sqsubset 3\frac{10}{71}.\ 1$; * liquebit fore magis $\pi.\ \delta$
$\sqsubset 3\frac{10}{71}.\ 1$. illud verò ſic conſtat.

Fig. 58. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG,
AH; & ob ang ABD = 2 ABE, eſt DB. BA [h] :: DX. KA; &
h 3. 6. componendo DB + BA. BA :: DA. KA; permutandóque DB
k 4. 6. + BA. DA :: BA. KA [k] :: BE. EA. (nam ob [l] ſimilia triangula
l 27. 3. EBA, EAK eſt BA. KA [h] :: BE. EA).

Simili diſcurſu eſt
$$\left.\begin{array}{l}\text{EB}\\ \text{FB}\\ \text{GB}\end{array}\right\} + \text{BA}.\ \begin{array}{l}\text{EA}.\\ \text{FA}.\\ \text{GA}.\end{array}\ ::\ \begin{array}{l}\text{BF. FA}.\\ \text{BG. GA}.\\ \text{BH. HA}.\end{array}$$

Sit BA = 1560. ergo CA (DA) = 780; & DBq (BAq —
m 8. 5. ADq) = 1825200 $\sqsupset$ 1825201 = q. 1351. [m] ergo 2911 (1560
+ 1351). 780 $\sqsubset$ DB + BA. DA :: BE. EA; quare ſi pona-
n lemm. præc. tur EA = 780, [n] erit BE $\sqsupset$ 2911; & BAq (BEq + EAq) $\sqsupset$
9082321 $\sqsupset$ q. $3013\frac{3}{4}$.

[m] Quare $5924\frac{3}{4}$ $(2911 + 3013\frac{3}{4}).\ 780.$ (hoc eſt 1823. 240)
$\sqsubset$ EB + BA. EA :: BF. FA; unde ſi FA ponatur 240, [n] erit
BF $\sqsupset$ 1823. & BAq (FAq + BFq) $\sqsupset$ 3380929 $\sqsupset$ q.
$1838\frac{9}{11}$.

Unde iterum $3661\frac{9}{11}$ $(1823 + 1838\frac{9}{11}).\ 240$ (hoc eſt 1007.
66) [m] $\sqsubset$ FB + BA. FA :: BG. GA; quare poſito GA = 66,
[n] erit BG $\sqsupset$ 1007; & BAq (GAq + BGq) $\sqsupset$ 1018405 $\sqsupset$ q
$1009\frac{1}{6}$.

Itaque denuo $2016\frac{1}{6}$ $(1007 + 1009\frac{1}{6}).\ 66$ [m] $\sqsubset$ GB + BA.
GA :: BH. HA; unde ſi ponatur HA = 66, [n] erit BH $\sqsupset 2016\frac{1}{6}$;
& BAq (HAq + BHq) $\sqsupset 4069284\frac{1}{36} \sqsupset$ q. $2017\frac{1}{4}$. ergo BA.

A H $\sqsupset$ 2017$\frac{1}{4}$. 66; vel inverſè A H. B A $\sqsubset$ 66. 2017$\frac{1}{4}$. [p] quare 96 A H. B A $\sqsubset$ 94 × 66. 2017$\frac{1}{4}$ (hoc eſt, 6336. 2017$\frac{1}{4}$ :: 3$\frac{1052}{8071}$. 1.) quare 96 A H. B A $\sqsubset$ 3$\frac{1052}{8071}$ 1 $\sqsubset$ 3$\frac{10}{71}$. 1. unde conſtat propoſitum.

p 15. 5.

Coroll. Hinc $\pi . \delta$ :: 22. 7, ferè.

Prop. III.

Circulus ad ſuæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè), quam 11 *ad* 14.

Nam $\delta\pi . \delta\delta$ [a] :: $\pi . \delta$ [b] :: 22. 7. ergo $\frac{\delta\pi}{4}$ (⊙). $\delta\delta$ :: $\frac{22}{4}$. 7 :: $\frac{44}{4}$. 14 (hoc eſt) :: 11. 14.

a 1. 6.
b cor. 2. huj.

Cyclometriam longiùs, & ad majorem ἀκρίβειαν promovit poſteriorum induſtria. Conſulantur *Vieta*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad craſſiores ſaltem uſus ſufficit hæc *Archimedea* Circuli dimenſio.

De SPIRALIBUS, *ſeu* HELICIBUS.

Archimedes Doſitheo S.

THeorematum ad Cononem tranſmiſſorum, pro quibus aſſiduè literis à me contendis ut demonſtrationes conſcribam, plerorumque quidem ſcriptas habes in iis quas *Heraclides* pertulit; ipſorum verò quaſdam etiam in hoc libello ſcriptas ad te mitto. Nè mireris autem, quòd poſt diutiorem temporis moram eorum demonſtrationes edimus. Hoc enim accidit fieri, quia priùs voluerim iis exhibere, qui in Mathematicis occupantur, & ea libenter perſcrutari volunt: * quales enim in *Geometria* ſpeculationes, non bene tractabiles initio viſæ, tempore elaboratæ perfectiorem accipiunt? *Conon* certè non ſufficiens ipſorum inquiſitioni tempus nactus vitam commutavit, obſcuritate involuta relinquens; cùm & hæc omnia reperiſſet, & alia multa perveſtigâſſet, longiuſque promoviſſet *Geometriam*: ſcimus enim in illo fuiſſe non mediocrem Mathematum peritiam, nec non induſtriam eximiam: à *Cononis* autem exceſſu cùm anni plures effluxerint, Problematum nullum à quovis percepimus ſolicitari. Volo autem eorum unumquodque ſingillatim producere * * * ut redarguantur qui præ ſe ferunt omnia inveniſſe, nullam proferentes eorum de-

vel quot: *fortè legendum* πόσα *pro* ποῖα.

Hîc in editis libris interſeruntur hæc verba: καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτ' ἐσσεῖμεν. *quorum mentem aſſequi nequeo. Locus proculdubio mendoſus & mutilus: è conjectura ſic interpolata redderem: lego* καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ εἶναι κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτθήσομαι. Contigit enim duo quædam eorum quæ in illo (*Cononis* ſcripto) ſeparatim appoſita ſunt, falſa eſſe; * ποτίδει, *pro* περισσίδει, *vel* περισσίδειν. *Habetur apud Theocr. Idyl.* 14 *v.* 45. *imò infra hic. prop.* 4. quæ quidem ultimò in fine proponemus, ut &c.

monſtrationem, *interdumque quæ impoſſibilia ſunt profitentes inveniſſe: hæc autem quænam Problemata ſunt; & *quorum miſſas habes demonſtrationes; & quænam in hoc libro perlata *comprobamus*, tibi declarabo. Primum itaque Problematum fuit: *Sphærâ datâ, ſpatium planum invenire ſphæræ ſuperficiei æquale:* quod quidem primò manifeſtum evaſit *edito de Sphæra libro*; quippe cùm oſtenſum ſit, *quòd omnis ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eorum qui in ſphæra*; liquet quomodo poſſibile ſit invenire planum ſpatium æquale ſuperficiei ſphæræ. Secundum verò: *Dato cono vel cylindro, ſphæram invenire æqualem cono vel cylindro.* Tertium verò: *Datam ſphæram plano ſecare, ita ut ejus portiones inter ſe præſtitutam habeant rationem.* Quartum autem: *Datam ſphæram plano ſecare, ita ut ſuperficiei portiones aſſignatam inter ſe rationem habeant.* Quintum verò: *Datam ſphæræ portionem datæ ſphæræ portioni aſſimilare.* Sextum verò: *duabus ſphæræ, ſeu ejuſdem ſeu diverſæ, portionibus datis; invenire ſphæræ portionem quandam, quæ ſit ipſa quidem uni ſegmentorum ſimilis, ſuperficiem verò æqualem habeat ſuperficiei alterius portionis.* Septimum: *A data ſphæra portionem reſecare plano, ita ut portio ad conum baſin habentem eandem cum portione, & altitudinem æqualem præſtitutam habeat rationem, non majorem illa, quam habent tria ad duo.* Horum quidem modò dictorum omnium demonſtrationes pertulit *Heraclides.* Quod autem poſt hæc ſeparatim appoſitum: falſum erat; eſt autem hujuſmodi: *Si ſphæra plano ſecetur in inæqualia portio major ad minorem duplicatam habet rationem ejus, quam habet major ſuperficies ad minorem.* Quod verò hoc falſum ſit, ex antea miſſis manifeſtum eſt. Quin ſeorſim iſtis adſcriptum erat & hoc: *Si ſphæra plano ſecetur inæqualiter, ad rectos diametro cuidam ex iis qui in ſphæra, portio major ad minorem eandem obtinebit rationem, quam diametri pars major ad minorem:* major enim portio ſphæræ ad minorem habet

* ἃ προθ᾽, lego οἱ προθ᾽.

* τίνων ὧν, deleo ὧν.

9 11. de ſph.

Ibid.

bet

Digitized by Google

bet minorem quidem quàm duplicatam rationem ejus quam habet major ſuperficies ad minorem, majorem verò quàm ſeſquialteram. Erat verò ſepoſitorum problematum ultimum etiam falſum: *quòd, ſi ſphæræ alicujus diameter ſecetur, ita ut quod à majori ſegmento ſit quadratum triplum ſit quadrati, quod à ſegmento minori, perque ſectionis punctum actum planum diametro perpendiculare ſphæram ſecet, erit talis ſpecie figura, qualis eſt major ſphæræ portio, maxima portionum quarumvis aliarum æqualem habentium ſuperficiem. Quòd autem hoc ſit falſum, conſtat ex antea miſſis theorematis:* etenim demonſtratum eſt, *quòd hæmiſphærium maxima eſt portionum, ſub æquali comprehenſarum ſuperficie.* Poſt hæc verò de cono propoſita ſunt & hæc: ſi rectanguli coni ſectio manente diametro circumvolvatur, ita ut diameter ſit axis; à rectanguli coni ſectione deſcripta figura vocetur *Conoides*; & ſi conoideam figuram planum contingat; plano verò contingenti ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abſcindat, abſciſſæ qnidem portionis baſis appelletur planum abſcindens, vertex verò punctum, ad quod aliud planum *conoides* tangit. Quinetiam ſi dicta figura plano ſecetur ad axem recto, quod ſectio quidem circulus erit perſpicuum eſt; *Quòd verò reſecta portio ſeſquialtera erit coni baſin habentis eandem cum portione, & æqualem altitudinem,* demonſtrare oportet. Ac ſi *Conoidis* duæ portiones planis reſecentur utcunque ductis, quòd equidem ſectiones erunt *oxygoniorum conorum* ſectiones, patet; ſiquidem reſecantia plana non ſint ad axem recta: quòd verò portiones hanc inter ſe rationem habent, quam potentiâ inter ſe habent quæ ab ipſarum verticibus ducuntur axi parallelæ uſque ad ſecantia plana, demonſtrandum eſt. Horum autem demonſtrationes *ita tibi mandantur: poſt iſta verò de *Helice* propoſita fuerunt hæc. Eſt verò quaſi genus aliud problematum,*nihil habens commune cum prædictis:

de

vid. 26.

* οὕτω *forte ſubeſt aliquid errati.*

**lego* ἐπίκοινον ἔχοντα *pro* ἐπ' ἀυτᾶν, ἐόντα.

de quibus in hoc ipſo libello demonſtrationes tibi conſcripſi. Sunt autem hæc: [illa ſubjungit, quæ habentur infrà in Prop. 24. 18. 27. 28.] Horum à me, & aliorum de Helice demonſtrationes in hoc libello ſcribuntur.

PRæmittuntur autem, ſicut & aliis Geometricis, *quæ uſum habent ad ipſorum demonſtrationem. Aſſumo verò & in his, ex iis quæ in libris extant antehac editis, hæc lemmata. *Inæqualium linearum *&c.*

* *Innuit II. primas propoſitiones, quæ lemmaticæ ſunt, et ſequentium demonſtrationi praſtratæ.* * *Vide 5. ax. libri I. de ſph. & cyl.*

Prop. I.

Si in aliqua linea (A G) *feratur punctum quoddam æquè ſibi ipſi velociter latum, & ſumantur in illa duæ lineæ* (A B, B G); *ſumptæ eandem inter ſe rationem habebunt, quam tempora, in quibus punctum rectas tranſierit.* Fig. 69. 70.

Tempora repræſententur à rectis $\alpha\beta, \beta\gamma$. & * ſumantur B M, B N utcunque multiplices rectarum B A, B G; & $\beta\mu, \beta\nu$ pariter multiplicia temporum $\beta\alpha, \beta\gamma$: & quia motus ^{a}æquè veloces ſunt, erit $\beta\mu$ tempus motûs continuati per B M; & $\beta\nu$ tempus motûs per B N. Quòd ſi recta B M major ſit rectâ B N, liquet (ob motûs ſuppoſitam ἰσοτάχειαν) eſſe tempus $\beta\mu$, quo peragitur B M, majus tempore $\beta\nu$, quo peragitur B N; & ſimili ratione ſi B M $\underset{\sqsupset}{=}$ B N, eſſe correſpondenter $\beta\mu \underset{\sqsupset}{=} \beta\nu$. ^{d} unde erit A B. B G :: $\alpha\beta$. $\beta\gamma$. *Q. E. D.*

* *poſt.*
a *hyp.*
d 5 *def. V.*

Prop. II.

Si duorum punctorum utroque ſecundùm lineam quandam, non per unam eandem, æquè ſibimet velociter lato; ſumantur in utraque lineâ duæ lineæ (A B, B C, & L M, M N) *& tùm primæ* (A B, L M) *in æqualibus temporibus a punctis tranſigantur, tum etiam ſecundæ* (B C, M N); *eandem inter ſe rationem habebunt ſumptæ lineæ.* Fig. 71. 72.

Lationis per A B, & L M tempus ſit X; & lationis per B C, M N tempus ſit Y; eſtque A B. B C ^{a}:: (X. Y ^{a}::) L M. M N. *Q.E.D.*

a 1 *hujus.*

Prop.

Prop. III.

Datis quotlibet circulis, recta ſumi poteſt major circumferentiis circulorum.

a per aliquam 4ii elem. b 2.1. de ſph. Circulis [a]circumſcribantur polygona quævis, [b] liquet rectam eorum perimetris æqualem circulorum excedere circumferentias,

Prop. IV.

Datis duabus lineis inæqualibus rectâ (R) *& circuli circumferentia* (P), *ſumi poteſt recta, minor quidem datarum linearum majore, major autem minore.*

Hoc è quantorum homogeneitate, & adeò ab exceſſûs diviſibilitate ſatis perſpicuum eſt. Sed cum auctore, ſit alterutra R major; & ex-
a 5 ax.1. de ſph. ceſſus R—P multiplicatus per aliquem numerum N [a]excedat R. Erit
b conſtr. c 7 ax.1. $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. Nam quia $R - P \times : N$ [b] $\sqsubset R$. [c]erit $R - P \sqsubset \frac{R}{N}$ ergo
d 4. ax. 1. e 5. ax. 1. tranſponendo R [d] $\sqsubset \frac{R}{N} + P$. [e] & $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. *Q.E.F.*

Prop. V.

Fig. 73. *Dato circulo, & recta* (B T) *tangente circulum, poteſt à circuli centro* (A) *duci recta* (A T) *ad tangentem, ita ut à tangente & circuli circumferentia intercepta recta* (D T) *ad radium* (A D) *minorem rationem habeat, quàm circuli arcus* (B D) *qui eſt inter contactum* (B) *& eductam* (A T) *ad datam quamcunque circuli circumferentiam* (P).

a 3 hujus. Accipiatur recta quapiam X [a]major quàm P; & agatur diameter
Fig. 74. N M ad B T parallela, cui occurrat recta B D ſecans circulum in D,
ita ut intercepta D F major ſit quàm X (id quod fieri poteſt, quoniam
a 4. 6. ſic interceptæ ab M versùs partes F creſcunt ad infinitum). Jam tra-
b 1. ax. 1. de ſph. & 8. 5. jectâ A T per D, dico factum. Nam T D. D A ([a]:: B D. D F [b] $\sqsupset$
c conſt. & 8. 5. arc B D. D F [c] $\sqsupset$ arc B D. X) [c] $\sqsupset$ arc B D. P.

Prop. VI.

Fig. 75. *Dato circulo, & in circulo rectâ* (Z D) *quæ ſit minor diametro, poteſt à circuli centro* (A) *ad peripheriam projici recta* (A G) *ſecans datam*

tam in circulo rectam (Z D), *ita ut recta* (G H) *inter peripheriam & rectam in circulo datam comprehenſa ad conjunctam* (G Z) *à termino* (G) *projectæ, qui eſt in peripheria ad alteram extremitatem* (Z) *datæ in circulo rectæ, præſtitutam habeat rationem* (R *ad* S); *modò tamen data ratio minor ſit ea, quam habeat dimidia* (Z E), *datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem* (A E).

Ducatur diameter N M ad D Z parallela, cui occurrat tangens ZS, & connectatur A Z; & ob angulos A Z E, Z A S [a] pares, & [b] rectos Z E A, A Z S, erunt triangula Z E A, A Z S ſimilia. [c] unde A Z. Z S :: Z E. A E [d] $\sqsubset$ R. S. fiat R. S :: A Z. X; [e] ergo X $\sqsubset$ Z S. Igitur ſi per Z (quod fieri poſſe *conſtat) tranſeat recta, ſecans circulum in G, ſic ut inter diametrum & G intercepta G K æquetur ipſi X (ſecabit autem ad partes D, quia G K $\sqsubset$ Z S, & angulum S Z M nulla ſecet major quam S Z); & connectatur A G; quoniam G H. G Z :: [c] G A (Z A). G K [f] :: Z A. X [g] R. S [h] :: G H. G Z, conſtat propoſitum. *

a 29. 1.
b *hyp* & 16. 3.
c 4. 6.
d *hyp.*
e 10. 5.
* *Id nos alibi, quo modo fieri poſſit, oſtendimus.*
f *conſt.* & 7. 5.
g *conſtr.*
h 11. 5.

* *ſch. ad 6. Vides conditionem apponi meritò: nam ſi eſſet* G H. G Z (*vel* G A. G S) :: R.S :: ZE. A E :: Z A. Z S. *eſſent* G S, Z S *æquales*; q. f. n.

Prop. VII.

Fig. 75.

Iiſdem datis, & rectâ (D Z) *protractâ poteſt è centro recta* (A H) *educi, ita ut quæ* (G H) *fuerit inter peripheriam & protractam ad conjunctam* (G Z) *à termino interceptæ ad terminum protractæ propoſitam habeat rationem* (R *ad* S), *dummodo data ratio major fuerit eâ, quam habet dimidia* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem* (A E).

Ducatur enim tangens Z S, & connectatur A Z, & cætera ut in præcedenti. Eſtque Z A. Z S [a] :: Z E. A E [b] $\sqsupset$ R. S. fiat R. S :: Z A. X; erit ideo X $\sqsupset$ Z S. itaque ducatur Z K, ita ut intercipiatur G K = X (quod conſtat fieri poſſe intra angulum A Z S) éſtque G H. G Z [a] :: A G (A Z) G K [c] :: A Z. X [d] :: R. S :: [e] G H. G Z. ergo factum.

a 4. 5.
b *hyp.*
c *conſt.* & 7. 5.
d *conſt.*
e 11. 5.

Prop. VIII.

Fig. 76.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) *quæ minor diametro, & aliâ* (Z S) *tangente circulum ad in circulo datæ terminum* (Z), *poteſt à circuli centro* (A) *projici recta quædam* (A L), *ita ut pars ejus* (H G) *accepta inter circumferentiam circuli, ac datam in circulo rectam ad partem*

Digitized by Google

partem (L Z) *à tangente interceptam habeat propoſitum rationem* (R *ad* S); *ſiquidem data ratio ſit minor eâ quam habet ſemiſſis* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è circulo ipſi perpendicularem* (A E).

a 4. 6.
b *hyp.*
c 10. 5.
d 5. 4.
e 4. 6.
f 16. 6.
g 35. 3.
h 7. 5.
k 1. 6.
l *conſt.* & 7. 5.
m 35. 3. & 16. 6.
n 7. 5.
o 11. 5.
p 19. 5.
q *conſt.*

Sit diameter N M ad D Z parallela, tangenti L Z occurrens in S; fiátque R. S :: A Z. Z T. unde cùm ſit A Z. Z S [a] :: Z E. A E [b] $\sqsupset$ R. S. [c] erit Z T $\sqsubset$ Z S. Per puncta A, S, T [d] ducatur circulus, quem ſecet A Z producta in Y, ducatúrque A X, ſic ut L X = Z Y (quod fieri poſſe conſtat ad alteras partes diametri AP, tranſeuntis inter Z, T; ob Z T $\sqsubset$ Z S, & angulum A Z T rectum) hæc autem (A X) tangentem ſecet in L, circulum primò poſitum in G, rectam Z D in H. Dico factum.

Nam L A. H A :: [e] L S. Z S. [f] unde L A × Z S = H A × L S. Item L T × L S [g] = L A × L X. [h] quare L T × L S. H A × L S ([k] L T. H A) :: L A × L X. L A × Z S [k] :: L X. Z S [l] :: Z Y. Z S [m] :: Z T. Z A [n] :: Z T. A G. [o] :: L T. H A [p] :: Z T — L T. A G — H A (hoc eſt) :: L Z. G H. ac invertendo G H. L Z :: (Z A. Z T [q] ::) R. S. *Q.E.F.*

Prop. IX.

Fig. 77.

Iiſdem datis, ac in circulo datâ lineâ (D Z) *protractâ, poteſt è centro circuli ad protractam educi recta* (A H); *ita ut quæ* (G H) *eſt inter peripheriam & productam ad interceptam* (L Z) *ex tangente ad contactum, præſignatam ſortiatur rationem* (R *ad* S), *ſi modò data ratio major ſit eâ, quam habet datæ in circulo ſemiſſis* (Z E) *ad ductam ipſi è centro perpendicularem* (A E).

Conſtruitur & demonſtratur eodem prorſus modo quo præcedens; tantùm hic faciendo A Z. Z T :: R. S, evadit Z T $\sqsupset$ Z S; & inde recta A H occurrit circulo infra tactum ad partes S. quid plura?

Vides in duobus his problematis deſiderari, ut intercipiatur L X = Z Y, id quod præſtari poteſt ope primæ conchoidis, cujus polus A, chorda S T, ſagitta Z Y; ejus enim cum circulo A S T interſectio determinabit punctum X. at per conicas quoque ſectiones idem effici poteſt, utpote ſolidum Problema.

Prop. X.

Fig. 78.

Si lineæ quotcunque ponantur deinceps æquali ſeſe excedentes (a, b, c, d, e, f) *fuerit autem exceſſus æqualis minimæ* (a); *& aliæ lineæ ponantur, multitudine quidem æquales illis, magnitudine verò ſingulæ æquales*

quales maximæ (f)*; quadrata ab æqualibus maximæ aſſumentia quadratum ex maxima, & comprehenſum (rectangulum) à minima & æquali omnibus ſeſe æqualiter excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum ab illis, quæ ſeſe excedunt.*

$7ff + fa + ea + da + ca + ba + aa = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff.$

Clariùs forſan & breviùs exprimatur, ſi ſit quæcunque ſeries æqualiter ſe continuò excedentium, incipiens à puncto (ſeu nihilo) incluſivè, tripla ſumma quadratorum ex his adæquabitur ſummæ quadratorum è totidem æqualibus maximæ, unà cum rectangulis è minima in omnes.

Nam ſumma quadratorum è tot æqualibus [m] maximæ eſt.

m 4. 2.

$$
\begin{array}{ll}
 & ff \\
0\ a.b.c.d.e.f & aa + ee + {}^*2ae\ ({}^*2ae. \\
0\ 1.2.3.4.5.6. & bb + dd + {}^*2bd\ ({}^*4ad.\ \text{ob } b = 2a. \\
6.5.4.3.2.1.0. & cc + cc + {}^*2cc\ ({}^*6ac.\ \text{ob } c = 3a. \\
 & dd + bb + {}^*2db\ (8ab.\ \text{ob } d = 4a. \\
 & ee + aa + {}^*2ea\ (10aa.\ \text{ob } e = 5a. \\
 & ff
\end{array}
$$

Item $ff^* = {}^n 6af^\dagger = {}^n af + 2ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ff.$

Similiq; diſcurſu, $ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ee$

$$
\begin{aligned}
ad + 2ac + 2ab + 2aa &= dd \\
ac + 2ab + 2aa &= cc \\
ab + 2aa &= bb \\
aa &= aa
\end{aligned}
$$

* ob $f = 6a.$

$\dagger$ ob $5f = \left| \begin{array}{l} 2e + 2d + \\ 2c + 2b + \\ 2a. \end{array} \right.$

Horum ſumma eſt, $af + 3ae + 5ad + 7ac + 9ab + 11aa.$

n 1, 2.

Quæ quidem ſumma excedit ſummam rectangulorum ſupra poſitam per $af + ae + ad + ac + ab + aa.$ quod ſi igitur adjiciatur hic exceſſus ſummæ quadratorum ſuprà collocatæ, perſpicuum eſt conflari $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff$: Conſimilis diſcurſus cuilibet accommodari poſſit linearum multitudini.

Corollaria.

1. Itaque conſtat hinc quòd omnia quadrata ab æqualibus maximæ eorum quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus minora ſunt, quàm tripla.

2. Reliquorum verò dempto maximæ quadrato majores ſunt quàm tripla, hoc eſt eſſe $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee$, quia ſcilicet $ff = 6af \sqsubset af + ae + ad + ac + ab + aa$, adeóque ex ſuperiore æquatione hinc auferendo $ff + af + ae + ad + ac + ab + aa$,

illinc $2ff$ remanebit $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + ff$.

3. Quinetiam ideo ſi ſimiles figuræ deſcribantur, tum ab omnibus ſeſe æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus, reliquarum verò demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & ſimilium figurarum eadem prorſus eſt ratio.

Schol. Hinc pro cognoſcenda quadratorum cujuſcunque progreſſionis Arithmeticæ ſumma regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si ſeries incipiat ab 0, primúſque poſt 0 terminus ſit a, ultimus verò (ſeu maximus) ſit f; & terminorum numerus dicatur n; erit $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$ (vel $\frac{2nff + nfa}{6}$) æqualis ſummæ quadratorum. Nam $\frac{nf}{2}$ æquatur ſummæ terminorum (id clariſſimè cernis in hujuſce propoſitionis figura) ergo $nff + \frac{nfa}{2}$ æquatur triplæ ſummæ quadratorum.

Hinc erit tripla ſumma quadratorum. ad ſummam quadratorum è totidem æqualibus maximo. ut $f + \frac{a}{2}$ ad f, vel ut $1 + \frac{a}{2f}$ ad 1.

2. Si ſeries incipiat ab 0, & primus ab eo terminus ſit 1; erit ſumma quadratorum $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$. (è priore).

Hinc ſumma quadratorum tripla, ad ſummam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut $2n - 1$ ad $2n - 2$.

Nam $nff + \frac{nf}{2} . nff :: f + \frac{1}{2} . f :: n - 1 + \frac{1}{2} . n - 1$ (ob $f = n - 1$) $:: n - \frac{1}{2} . n - 1 :: 2n - 1 . 2n - 2$.

Item illa ad hanc ſe habet ut $1 + \frac{1}{2n - 2}$ ad 1.

3. Eodem poſito, erit ſumma quadratorum $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$; vel $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$. Nam ob $n - 1 = f$ erit $nn - 2n + 1 = ff$. quare $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$. & $nf = nn - 1$ quæ collecta dant $2n^3 - 3nn + n$.

4. In quacunque Progreſſione, ſi minimus terminus ſit a, exceſſus x erit ſumma quadratorum $naa \left.\begin{matrix} -nn \\ -n \end{matrix}\right\} ax + \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} xx$.

Nam ſumma quadratorum eſt

$$a.\ a+x.\ a+2x.\ a+3x \qquad \begin{array}{l} aa+0+0 \\ aa+2ax+xx \\ aa+4ax+4xx \\ aa+6ax+9xx \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summa} \left.\begin{array}{r} naa+{}^{*}nn \\ -\ n \end{array}\right\} ax \qquad \frac{+2n^3-3nn+n}{6}\,xx$$

* Nam ſumma 0.2.4.6. $= nn-n$.

5. Ex his porro colligitur in iſtis progreſſionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major eſt terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus ſummam triplicatam, ad æqualitatem cum ſumma quadratorum è totidem æqualibus maximo propiùs accedere, nam ſi pro f ſubſtituatur ea major quilibet g, quia $1+\frac{a}{2g} \sqsupset 1+\frac{a}{2f}$ liquet triplam ſummam quadratorum ex illis quorum maximus terminus eſt g, minus inæqualem eſſe ſummæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus eſt f.

6. Adeóque ſi numerus terminorum infinitus ſit, tripla ſumma quadratorum ex inæqualibus juſtè adæquabitur quadratis è maximo, nam ſi ultimus terminus ſit Z, erit $\frac{a}{zz} = 0$ quia a ad z (nedum ad zz) nullam habebit proportionem. Cæterùm fontem hìc uberrimum aperuit *Archimedes*, à quo plurimi in fundum Mathematicum fluvii redundârunt.

Pertentando colligetur iſthoc hoc pacto.

$$\left.\begin{array}{lll}
\textit{Series } 1^a. & \left.\begin{array}{l} 0.\ \ 1.\ \text{tripla } 3. \\ 2\times1 === 2. \end{array}\right\} & \text{ratio } 1\tfrac{1}{2}.\ 1. \\
\textit{Series } 2^a. & \left.\begin{array}{l} 0.\,1.\,4:\ \text{tripla } 15 \\ 3\times4 === 12 \end{array}\right\} & \text{ratio } 1\tfrac{1}{4}.\ 1. \\
\textit{Series } 3. & \left.\begin{array}{l} 0.\,1.\,4.\,9.\ \text{tripla } 42 \\ 4\times9 === 36 \end{array}\right\} & \text{ratio } 1\tfrac{1}{6}.\ 1. \\
\textit{Series } 4. & \left.\begin{array}{l} 0.\,1.\,4.\,9.\,16.\ \text{tripla } 90. \\ 5\times16 ===== 80. \end{array}\right\} & \text{ratio } 1\tfrac{1}{8}.\,1
\end{array}\right\}$$

Eodem modo procedit ratio ad infinitum, verſus æqualitatem vergendo.

Prop. XI.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (ZA, ZB, ZC, ZD) *æquali ſeſe excedentes; & aliæ lineæ ponantur* (*ZD, ZE, ZF) *multitudine quidem unâ minores æqualiter ſeſe excedentibus, magnitudine verò ſingulæ æquales maximæ* (ZD)*; quadrata omnia ab æqualibus ma-*

*vel ZE, ZF, ZG.

$$DZq + EZq + FZq \,.\, DZq + CZq + BZq \sqsupset DZq \,.\, DZ \times AZ + \frac{DAq}{3}$$

$$EZq + FZq + GZq \,.\, CZq + BZq + AZq \sqsubset EZq \,.\, EZ \times AZ + \frac{EAq}{3}$$

ximæ ad quadrata ſeſe æqualiter excedentium ſine minima (ZA) minorem rationem habebunt, quàm quadratum maximæ ad æquale utrique, tum comprehenſo ſub maxima, & minima, tum tertiæ parti quadrati exceſſûs, quo maxima excedit minimam; ad quadrata verò ſeſe æqualiter excedentium ſine quadrato maximæ majorem eâdem ratione.

Eſt enim $AZ \times : DZ + EZ + FZ + \frac{DAq + EAq + FAq}{3}$

a 3.2. et 1. ax. 1. [a] $= AZq + AZq + AZq + AZ \times : DA + EA + FA : + \frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset AZq + AZq + AZq : + AZ \times : 2DA + 2CA + 2BA : + DAq + CAq + BAq$ (quia ſcilicet $DA + EA + FA \sqsupset 2DA + 2CA + 2BA$;

b 1 cor. 10. h. [b] & $\frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset DAq + CAq + BAq$)

c 4.2. & 2. ax. 1. [c] $= DZq + CZq + BZq$.

d 8. 5. [d] ergo $DZq + EZq + FZq \,.\, DZq + CZq + BZq \sqsupset (DZq + EZq + FZq \,.\, AZ \times : DZ + EZ + FZ + \frac{DAq + EAq + FAq}{3}$

e 12. 5. [e] $::) \; DZq \,.\, AZ \times DZ + \frac{DAq}{3}$.

Similem adhibendo diſcurſum, quoniam $EA + FA + GA \sqsubset 2CA + 2BA$; & $\frac{EAq + FAq + GAq}{3}$

g 2 cor. 10 h. [g] $\sqsubset CAq + BAq$; erit $AZ \times : EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3} \sqsubset CZq + BZq + AZq$.

h 8. 5. [h] quare $EZq + FZq + GZq \,.\, CZq + BZq + AZq \sqsubset (EZq + FZq + GZq \,.\, AZ \times : EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3}$

k 12. vel 15. 5. [k] $::) \; EZq \,.\, AZ \times EZ + \frac{EAq}{3}$.

Coroll.

Et proinde ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus, tam ab inæqualiter ſeſe excedentibus quàm ab æqualibus maximæ; figuræ omnes, quæ ab æqualibus maximæ ad illas quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus, ſine figura quæ à minima, minorem rationem quàm quadratum à maxima ad æquale utrique ſimul & comprehenſo ſub maxima ac minima, & tertiæ parti ejus quod eſt ab exceſſu, quo maxima exſuperat minimam; ad eas vero quæ ab iiſdem ſunt figuras ſine illa quæ à maxima, majorem eâdem ratione.

Schol.

Si $DA = ZA$, vel $ZD = 2\,ZA$, liquet eſſe $ZDq.\ ZD \times ZA + \frac{DAq}{3} :: 12.\ 7.$ [a]vel $3\,ZDq.\ 3\,ZD \times ZA + DAq :: 12.\ 7.$ Nam $3\,ZDq$ [b]$= 12\,ZAq.$ & $3\,ZD \times ZA$ [c]$= 6\,ZAq$, & DAq [d]$= ZAq.$

a 15. 5.
b 4. 2.
c 1. 6.
d *hyp.*

Definitiones.

I.

Si in plano recta linea (AZ) *manente altero termino* (A) *æquali velocitate circumlata, reſtituatur denuo (iſtuc) unde profecta eſt; ſimul verò cum linea circumducta feratur punctum æquè velociter ſibi ipſi, ſecundùm rectam* (AZ), *incipiens à manente termino* (A); *punctum helicem deſcribet.*

Fig. 80.

Schol.

Itaque ſi dividatur recta A Z in quotcunque partes æquales A *b*, *bc*, *cd*, &c. & circumferentia à puncto B deſcripta in partes totidem æquales, ac ductis à centro A ad circumferentiæ diviſiones radiis, auferantur AB, AC, AD, &c ipſis A *b*, A *c*, A *d* &c ordine æquales, per puncta A B, C, D &c. tranſibit helix. Et hic modus eſt helicem deſcribendi.

II.

Vocetur itaque recta quidem terminus (A) *qui manet ipſâ circumductâ, principium Helicis.*

III.

*Linea verò *ſitus, à quo cœpit recta* (AZ) *circumferri, principium revolutionis.*

* *vel potiùs ipſa linea primò poſita.*

IV.

Recta, (AZ) *quam quidem in prima revolutione perambulârit punctum in recta latum, prima vocetur; illa verò* (ZY) *quam in ſecunda revolutione confecerit idem punctum, ſecunda; & conſimiliter aliæ juxta revolutionum numeros pariter denominentur.*

Fig. 81.

Digitized by Google

V.

Spatium verò ſub helice (A P Z) *in prima revolutione deſcriptâ, & rectâ* (A Z) *quæ prima eſt, dicatur primum; quod autem continetur ab helice* (Z Q Y) *per ſecundam revolutionem deſcriptâ, & rectâ ſecundâ* (Z Y) *ſecundum vocetur; aliáque deinceps eodem modo nominentur.*

Not. Nonnunquam ſpatium ſecundum dicitur incluſo primo, juxta definitionem hanc; at *ſubinde ſecundum dicitur, excluſo primo; & ita de reliquis.

* *in 27 prop. h.*

VI.

Et deſcriptus circulus, centro quidem puncto (A) *quod eſt principium Helicis, intervallo verò rectâ* (A Z) *quæ prima eſt, primus appelletur; deſcriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò* (A Y) *duplâ rectâ, ſecundus vocetur; & alii continuò poſt hos ad eundem modum.*

VII.

Fig. 82. *Ac ſi à puncto* (A) *quod eſt principium Helicis ducatur aliqua recta quædam linea* (A B); *quæ ſunt ad hujus rectæ partes eaſdem* (F Z) *verſus quas revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras* (E A) *conſequentia.*

Prop. XII.

Pappus 20 IV. Fig 83. *Si in helicem* (A B C D E Z) *unâ revolutione deſcriptam ab helicis principio* (A) *incidant rectæ quotlibet* (A B, A C, A D, A E) *æquales inter ſe angulos facientes: æqualiter ſeſe excedunt.*

Sint exceſſus C R, D S, E T; & centro A per Z ducatur circulus, ad quem protrahantur A B, A C, A D, A E; & ob angulos M A N, N A O, O A P pares, [a] liquet arcus M N, N O, O P æquari. [b] ergo & tempora per M N, N O, O P æquantur, [c] hoc eſt tempora per R C, S D, T E. [b] ergo ipſæ R C, S D, T E æquantur. *Q E D.*

[a] 26.3.
[b] 1 *hujus.*
[c] 1 *def. huj.*

Lemma.

Fig. 84. In triangulo B A C recta A G biſecet angulum B A C, erit $AB + AC \sqsubset 2AG$.

Per

Digitized by Google

V.

Spatium verò ſub helice (A P Z) in prima revolutione deſcriptâ, & rectâ (A Z) quæ prima eſt, dicatur primum; quod autem continetur ab helice (Z Q Y) per ſecundam revolutionem deſcriptâ, & rectâ ſecundâ (Z Y) ſecundum vocetur; aliáque deinceps eodem modo nominentur.

Not. Nonnunquam ſpatium ſecundum dicitur incluſo primo, jux-
* in 27 prop. h. ta definitionem hanc; at *ſubinde ſecundum dicitur, excluſo primo;
& ita de reliquis.

VI.

Et deſcriptus circulus, centro quidem puncto (A) quod eſt principium Helicis, intervallo verò rectâ (A Z) quæ prima eſt, primus appelletur; deſcriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò (A Y) duplâ rectâ, ſecundus vocetur; & alii continuò poſt hos ad eundem modum.

VII.

Fig. 82. *Ac ſi à puncto (A) quod eſt principium Helicis ducatur aliqua recta quædam linea (A B); quæ ſunt ad hujus rectæ partes eaſdem (F Z) verſus quas revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras (E A) conſequentia.*

Prop. XII.

Pappus 10 IV. *Si in helicem (A B C D E Z) unâ revolutione deſcriptam ab helicis*
Fig 83. *principio (A) incidant rectæ quotlibet (A B, A C, A D, A E) æquales*
inter ſe angulos facientes: æqualiter ſeſe excedunt.

Sint exceſſus C R, D S, E T; & centro A per Z ducatur circu-
lus, ad quem protrahantur A B, A C, A D, A E; & ob angulos
M A N, N A O, O A P pares, [a]liquet arcus M N, N O, O P æ-
a 26. 3. quari. b 1 hujus. [b]ergo & tempora per M N, N O, O P æquantur, [c]hoc eſt
c 1 def. huj. tempora per R C, S D, T E. [b]ergo ipſæ R C, S D, T E æquantur.
Q. E D.

Lemma.

Fig. 84. In triangulo B A C recta A G biſecet angulum B A C, erit $AB + AC, \sqsubset 2AG$.

Per

Digitized by Google

Per G ducatur K L ad A G perpendicularis ; & per B fiat B H ad K L parallela. Eſtque $BK^a = HL$. ergo $LC \sqsubset BK$. (Nam $CG.$ a 2. 6.
$GB^b :: CL. LH.$) ergo $AL + LC + AL\,(AK) - KB \sqsubset$ b 3. 6.
$AL + AK$ hoc eſt $AC + AB \sqsubset AK + AL\ ^c\!\sqsubset 2\,AG$. c 47. 1.

Prop. XIII.

Si recta linea (B C) *contingat helicem* (A B Z), *in uno tantùm puncto continget.*

Tangat enim, ſi fieri poteſt, duobus in punctis B, C ; & connectatur B C ; & angulum B A C biſecet recta A G, occurrens helici in a 12 *hujus.*
D ; tangenti in G. éſtque $AC - AD^a = AD - AB$. quare AC b 2 *ax.* 1.
$+ AB^b = 2\,AD$. Sed $AC + AB\ ^c\!\sqsubset 2\,AG$. ergo $AD \sqsubset AG$. c *lemm præc.*
ergo punctum G eſt intra helicem ; & proinde B C non tangit ſpiralem, contra hypotheſin.

Prop. XIV.

Si in helicem (A B C Z) *primâ revolutione deſcriptam incidant duæ* Papp. XIX 4.
rectæ (A B, A C) *à puncto* (A) *quod eſt principium helicis, & producantur* Fig 86.
ad circumferentiam primi circuli (Z M N O) *eandem inter ſe rationem habebunt in helicem incidentes* (A B, A C) *quam circuli arcus* (Z M N, Z M O) *qui ſunt inter helicis terminum* (Z), *& terminos* (N, O) *à productis ad peripherias factos, ſumptis in antecedentia arcubus, ab helicis termino* (Z).

Eſt enim recta A B ad rectam A C, [a]ut tempus per A B ad tem- a 1 *hujus.*
pus per A C ; [b]hoc eſt tempus per arcum Z M N ad tempus per ar- b 1 *def. hujus*
cum Z M O, [a]hoc eſt ut arcus Z M N ad arcum Z M O.

Coroll. Eodem diſcurſu quæcunque partes rectarum ad ſe ſunt, ut arcus eodem tempore peracti ; & totus radius ad quamcunque partem ipſius ſe habet, ut tota peripheria ad arcum eodem tempore pervolutum.

Prop. XV.

Et ſiquidem in helicem (A Z B C Y) *ex ſecunda revolutione de-* Fig. 87.
ſcriptam inciderint rectæ (A B, A C) *ab helicis principio* (A) ; *eandem rationem habebunt rectæ* (A B , A C) *quam dictæ peripheriæ* (Z M N, Z M O) *poſt acceptas integras circumferentias.*

a 1 *hujus.* b 1 *def. hujus.* Rurſus enim eſt recta A B ad A C, [a]ut tempus per A B ad tempus per A C, [b]hoc eſt ut tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M N ad tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M O, [a]hoc eſt ut tota circumferentia cum arcu Z M N ad totam circumferentiam cum arcu Z M O.

Sch. Eodem modo, de partibus oſtendetur , ut in *Coroll.* præcedentis, quod & ad ſequentia extendetur.

Nota verò poſſe dictarum peripheriarum rationes in quovis circulo circa centrum A deſcripto computari: rectæ enim A Z, A N, A O protractæ ſimiles perpetuò peripherias abſcindent.

Coroll. Eodem oſtendetur modo quòd ſi in helicem ex tertia revolutione deſcriptam inciderint rectæ, eandem inter ſe rationem habebunt, quam dicti arcus poſt totas circumferentias bis ſumptas: quin & ſimiliter quæ in alias helices incidunt, demonſtrantur eandem habere rationem, quam dicti arcus poſt integras circumferentias toties acceptas, quotus eſt numerus revolutionum unitate minutus, etiamſi altera incidens in terminum helicis cadat.

Prop. XVI.

Fig. 88. *Si helicem* (A B Z) *ex prima revolutione deſcriptam contingat recta linea* (S T); *& à contactu* (B) *connectatur ad punctum* (A) *quod eſt principium helicis; inæquales erunt anguli* (A B S, A B T) *quos facit tangens ad connexam; & quidem* (A B T), *qui in antecedentia, obtuſus eſt; qui verò* (A B S) *in conſequentia, acutus.*

a 1 *def hujus.* b 16. 3. c 5 *hujus.* d 4 *cor* 33.6. e 44 *hujus.* f 7. 5. g 10. 5. Centro A per B ducatur circulus B D E G; liquet helicem extra hunc cadere versùs partes T, [a]quia verſus illas creſcunt ad helicem ductæ rectæ; unde angulus A B T angulo ſemicirculari A B D, & [b]proinde quovis acuto major eſt. Sit itaque, ſi fieri poteſt, rectus; [b]quamobrem B T tanget circulnm B D E; unde [c]duci poterit recta A T ſecans tangentem in T, & circulum D, ita ut intercepta D T ſit ad radium A D in minori ratione, quàm arcus B D, ad arcum E G B. Occurrat A B circulo primo Z M N in N, & A D eidem in O, ac helici in H. eſtque componendo A T. A D $\sqsupset$ (arc E G B D. arc E G B [d]:: arc Z M N O. arc Z M N [e]:: A H. A B [f]::) A H. A D. [g]unde A T $\sqsupset$ A H; adeóque tangens intra helicem cadet, nec ideo tanget; quæ repugnant. quin potiùs angulus A B T obtuſus eſt, quique deinceps A B S acutus.

Coroll.

Haud abſimiliter oſtendetur, ſi & tangens helicem ad terminum (Z) contingat, idem evenire.

Prop. XVII.

Quinimò ſi helicem è ſecunda revolutione deſcriptam recta contingat, idem accidet.

Prorſus eâdem methodo demonſtratur quâ præcedens, niſi quòd hic loco prop. 14. adhibeatur prop. 15. hujus.

Coroll.

Eadem verò evenient, etiam ſi tangens ad finem helicis contingat.

Item ſimiliter oſtendetur, quòd ſi ex quacunque revolutione deſcriptam helicem recta quædam linea tangat, etiamnum ad finem ejus, inæquales efficiet angulos ad conjunctam à tactu ad principium helicis; & eum quidem qui in antecedentia eſt, obtuſum, illum verò qui in conſequentia, acutum.

Prop. XVIII.

Si helicem (A Z B) *ex primâ revolutione deſcriptam tangat recta linea* (P Z) *ad helicis terminum* (Z); *à puncto autem* (A) *quod eſt in principio helicis, ducatur quædam* (A P) *revolutionis principio* (A Z) *perpendicularis, ducta* (A P) *tangenti occurret; & quæ eſt inter tangentem ac principium ſpiralis recta* (AP) *æqualis eſt circuli peripheriæ* ϖ. Fig. 89.

Quòd tangens occurrat perpendiculari A P, patet; * quia angulus A Z B eſt acutus. Porro *16 hujus.*

Sit recta A O major peripheria ϖ; & ducatur O Z; dico O Z ſecare helicem infra Z, vel ad antecedentia helicis. Nam fiat A E ad O Z perpendicularis; ducatur autem A H, ſecans O Z protractam in H, & circulum in G, [a]ita ut ſit intercepta G H ad chordam Z G, Z A ad ϖ (id fieri poteſt, quia Z A. ϖ. [b]$\sqsubset$ Z A. A O, [c] vel Z E. A E). Secet autem A H helicem in B. Et quia G H. arc Z G [b]$\sqsupset$ (G H. chord Z G [d]::) Z A. ϖ. erit permutando G H. $\left|\begin{array}{l}\text{Z A.}\\ \text{A G}\end{array}\right.$ $\sqsupset$ arc Z G. ϖ. ergo componendo A H. A G. $\sqsupset$ (ϖ + arc Z G. arc Z G [e]::) A B. A G. [f]quare A B $\sqsubset$ A H. ergo punctum H eſt intra helicem, & proinde O Z ſecat helicem.

a 6 *hujus.*
b *hyp.* & 8.5.
c 4.6.
d *conſt.*
e 15 *hujus.*
f 10.5.

Fig 90.

Sit ſecundò AQ minor quàm ϖ, dico quoque ductam QZ helicem ſecare: nam ducatur tangens ZT, & AE ad ZQ perpendicularis; & quia A Z. ϖ [g] ⊐ A Z. A Q; [h] duci poſſit recta A L, ita ut H G inter Z Q, & circulum poſita ſe habeat ad Z L, partem tangentis abſciſſam, ut A Z ad ϖ; ſecet autem A L helicem in B. Et quia A Z. ϖ [k]:: H G Z L [l] ⊐ H G. arc Z G. erit permutando A Z (A G). H G. ⊐ ϖ. arc. ZG [m] :: A G. B G. [n] ergo H G ⊏ B G. unde punctum H eſt intra helicem: & proinde QZ helicem ſecat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem A P ducta peripheriæ inæqualem abſcindens tangat helicem, liquet illam quæ tanget, peripheriæ æqualem abſcindere. *Q.E.D.*

g *hyp.* & 8.5.
h 7 *hujus.*
k *conſt.*
l 8.5. & 2.
c.r 2.1. *de ſph.*
m *cor.* 14 *huj.*
n 10.5

Fig. 91.

Dico porro, ſi A P = ϖ, ductam P Z helicem tangere. Sumatur enim in D Z quodvis punctum H, & per ipſum ducatur A H occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur H K ad P A parallela; centro autem A per K ducatur circulus K R V, helicem ſecans in R; & per R ducatur radius A S. Eſtque P A. H K [o]:: A Z. K Z [*]:: A Z. R S [p]:: ϖ. arc ZS. ergo quum P A [q] = ϖ, [r] erit H K = arc. Z S. verùm H K ⊐ arc Z G. ergo arc Z S ⊐ arc ZG. [m] unde A R ⊏ A B. ergo quum A H ⊏ A R vel A K, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota D Z extra ipſam cadit.

o 4.6.
* 7.5.
p *cor.* 14. *huj.*
q *hyp.*
r 14.5.

In protractâ porro P Z ſumatur quodvis punctum *h*, & per ipſum ducatur A *k* ſecans helicem in *b*, circulum in *g*. Item ab *e* demittatur *e k* ad AZ perpendicularis, & centro A per *k* ducatur circulus *krv* helicem ſecans in *r*; ducatúrque recta A *r*, circulo primo occurrens in *s*. éſtque ut priùs A P. *h k* [s]:: AZ. Z K [t]:: A Z. S *r* [u]:: ϖ. arc ZS. [x] unde *h k* = arc Z *s*. Atqui *h k* ⊏ arc Z *g*. ergo arc Z *s* ⊏ arc Z *g*. quare A *r* ⊏ A *b*. verùm A *h* ⊏ A *k* = A *r*. ergo magis A *h* ⊏ A *b*. ergo punctum *h* eſt extra helicem. unde planè concluditur totam P Z utcunque productam extra helicem poni, ipſámque proinde contingere.

Figuræ hæ debitas proportiones non ſervant, nè lineæ nimiùm appropinquantes ſeſe obſcurent.
s 4. 6.
t 7.5.
u 15 *hujus.*
x 14.5.
*

Ita *ſubtiliſſimum hoc Archimedis theorema*, cum ejus converſo, demonſtravimus oſtenſivè; quod maluimus facere, tùm quia præſtantior eſt hic demonſtrandi modus, tum quo meliùs authoris ipſius methodus innoteſceret. Siquidem duæ primæ partes *Archimedis* principiis inſiſtunt; tertiam nos excogitavimus, quæ monſtrat quàm facilè, quámque perſpicuò theorematis hujus converſum demonſtrari poſſit, adeóque quomodo potuit inveniri.

Prop.

Prop. XIX.

At ſi ſpiralem (A Z Y) *ex ſecunda revolutione deſcriptam ad terminum contingat recta, & à principio ſpiralis ducatur quædam* (A O) *ad rectos revolutionis principio* (A Y), **occurret ipſa contingenti; eritque recta quæ eſt inter tangentem, & principium ſpiralis, dupla peripheriæ ſecundi circuli* (ϖ). Fig. 92. * *per* 17 *huj.*

Sit enim $OA \sqsubset 2\varpi$. [a]unde $AY, Z\varpi. \sqsubset AY.OA$ [b]$:: YE.AE$ (ductâ ſcilicet A E ad O Y perpendiculari) [c]ergo rurſus duci poſſit recta A H ſecans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut ſit intercepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad 2ϖ. ſecet igitur A H ſpiralem in B. Et quia $GH.\text{arc}\,YG$ [a] $\sqsupset GH.\text{chord}\,ZG$ [d]$:: AY.2\varpi$; erit permutando $GH.AY \sqsupset (\text{arc}\,YG.2\varpi$ [e]$::) GB.AY$. [f]ergo $GH \sqsupset GB$. & proinde punctum H eſt intra helicem. Unde O Y non continget helicem. Similirer, ſi ponatur $QA \sqsupset Q\varpi$, imitando præcedentis ratiocinium, demonſtrabis ductam Q Y helicem non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqualem A P abſcindet. *Q. E. D.*

a 8. 5.
b 4. 6.
c 6 *hujus.*
d *conſt.*
e *ſch.* 15 *huj.*
f 10. 5.

Sed & unico argumento, ſicut in præcedenti, demonſtrari poſſit converſum hujus, nempe ſi $AP = 2\varpi$, rectam P Y tangere helicem: tu rem expende; mihi conſtitutum eſt à repetitionibus temperare.

Coroll.

Eodem modo demonſtrabitur, quòd ſi helicem in qualicunque revolutione deſcriptam recta quædam tangat in helicis termino, & à principio helicis educta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat tangenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum numerum denominati, eodem numero.

Prop. XX.

Si helicem (A B Z) *in prima revolutione deſcriptam tangat recta linea* (B P) *non ad finem helicis; à contactu verò* (B) *ad principium helicis conjungatur recta* (B A) *& centro quidem* (A) *principio helicis, intervallo autem conjunctæ* (A B) *deſcribatur circulus* (B E F); *à principio autem helicis ducatur quædam* (A P) *à contactu ad initium helicis connexæ* (A B) *perpendicularis; occurret illâ contingenti; eritq; recta* (A P) *occurſui, & helicis principio interjecta, æqualis peripheriæ* Fig. 93.

(E F B) *quæ eſt inter contactum, & ſectionem, ubi deſcriptus circulus ſecat principium revolutionis; in antecedentia acceptâ peripheriâ à puncto* (E) *quod eſt in principio revolutionis.*

Coroll. 14. & not. 15. Nihil facilius eſt, quàm præcedentes diſcurſus huc applicare: nota tantùm, ſi ducatur quæpiam A C ſecans helicem in C, circulum in G, fore AG . GC :: arc EFB. arc BG. Cætera ſponte fluent:
A B
quid plura? ——ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶ
Αὖθις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν.

Coroll.

Quinetiam eodem pacto demonſtrabitur, ſi in ſecunda circumvolutione deſcriptam helicem contingat recta, non ad finem helicis, alia verò eadem conſtruantur, quòd rectæ contingenti occurrentis pars, intercepta à principio helicis, æqualis eſt toti deſcripti circuli peripheriæ, & præterea illi, quæ eſt inter dicta puncta, ſimiliter ſumptâ peripheriâ. Et porro ſi ex quacunque revolutione progenitam *helicem* contingat aliqua recta, non ad terminum helicis; alia verò eadem diſponantur, quòd recta dictis punctis interjecta, ſit multiplex quædam peripheriæ deſcripti circuli ſecundum numerum proximè minorem eo, ſecundùm quem revolutiones dicuntur., & inſuper æqualis arcui inter dicta puncta ſimiliter ſumpto.

Prop. XXI.

Fig. 94. *Sumendo ſpatium comprehenſum ſub helice* (A B C D E F G L Z) *in prima revolutione deſcripta, & prima in principio revolutionis recta* (A Z); *poſſibile eſt ipſi figuram planam circumſcribere, aliámque inſcribere, è ſimilibus compoſitam ſectoribus, ità ut circumſcripta inſcriptâ major ſit quocunque propoſito ſpatio* (X).

a 9. 1. Radii quotlibet primi circuli circumferentiam [a] æqualiter partiant (ordiendo ab Z) occurrentes helici punctis A, B, C, D, E, F, G, L, Z. tum centro A per hæc puncta ducantur arcus *b* B ϛ, *c* C ϰ, *d* D δ, *e* E ε, *f* F φ, *g* G γ, *l* L λ, *z* Z: itaque vides circumſcriptam helici figuram A *b* B *c* C *d* D *e* E *f* F *g* G *l* L *z* Z conflatam è ſectoribus ſimilibus *b* A *b*, *c* A C, *d* A D, *&c.* Vides etiam alteram A B ϛ C ϰ D δ E ε F φ G γ L λ inſcriptam, conſtantémque ſectoribus B A ϛ, C A ϰ, D A δ *&c.* qui totidem ſunt, & æquales ſectoribus figuræ circumſcriptæ, excepto maximo *z* A Z. ([b] nam ſector ϛ A B = *b* A B; &

b 33. 6.

ϰ A C

x A C = c A C, &c). Itaque ſi circulus [a]biſectione (vel aliâ æquali ſectione) continuo diviſus fuerit, ita ut ſector z A Z tandem evadat c 1. 10.
minor dato ſpatio X [c] (id quod fieri poteſt), liquet hoc modo fieri poſſe quod proponitur.

Coroll.

Hinc patet, quòd poſſibile ſit circa dictum ſpatium figuram, qualis dicta eſt, deſcribere, ita ut circumſcripta figura ſpatium ſuperet exceſſu minori quocunque propoſito ſpatio : & rurſus, aliam inſcribere, ita ut ſimiliter ſpatium ſuperet figuram minori quocunque propoſito ſpatio.

Sch. Nota radios A B, A C, A D, A E, &c. ſeſe æqualiter excedere ; & exceſſus æquari minimo A B. 12 *hujus.*

Prop. XXII.

Sumendo ſpatium comprehenſum ſub helice (Z M N O P R Y) *per ſecundam revolutionem deſcriptâ, & recta* (Z Y) *quæ eſt ſecunda in principio revolutionis, poteſt ipſi figura plana circumſcribi, ſimilibus è ſectoribus compoſita, necnon alia inſcribi, ſic ut circumſcripta inſcriptam excedat minori quàm propoſito quovis ſpatio* (X). Fig. 95.

Radii quotlibet ſecundum circulum [a]æqualiter diſpertiant, occurrentes helici punctis Z, M, N, O, P, R, Y ; per quæ, centro A, deſcribantur arcus $Z\zeta$, m M μ, n N ν, o O ω, p P ϖ, r R, y Y ; unde helici circumſcriptam habemus figuram A m M n N o O p P r R y Y conſtantem ſimilibus ſectoribus m A M, n A N, o A O, &c. & inſcriptam aliam A Z ζ M μ N ν O ω P ϖ R ρ conſtantem totidem ſectoribus Z A ζ, M A μ, N A ν, &c. Et cùm ſit ſector m A M [b]= M A μ ; & n A N [b]= N A ν, & ita continuò, liquet exceſſum figurarum eſſe penes ſectores Z A ζ primum inſcriptæ, & y A Y, ultimum circumſcriptæ (nam reliqui hujus reliquis illius æquantur). atqui continuâ biſectione [c]fieri poteſt, ut ſit rector y A Y $\sqsupset$ X ; túmque fortiùs erit ſect. y A Y − Z A ζ $\sqsupset$ X. quare conſtat propoſitum.

a 9. 1.
b 33. 6.
c 1. 10.

Schol. Rurſus nota radios A Z, A M, A N, &c. æquali exceſſu procedere, & maximum A Y duplum eſſe minimi A Z. 12 *hujus.*

Coroll. I.

Itaque liquet exceſſum circumſcriptæ figuræ ſupra ſumptum ſpatium (ſub helice comprehenſum) minorem eſſe poſſe quovis propoſito ſpatio. Itidémque dicti ſpatii ſupra inſcriptam figuram exceſſum minorem eſſe poſſe quolibet propoſito ſpatio.

II.

Simili modo liquet, quòd poſſibile eſt circa ſpatium ſub helice in quacunque revolutione deſcripta, & recta in principio revolutionis, ab eodem numero denominata comprehenſum deſcribere figuram, qualem diximus, planam, ita ut circumſcripta figura ſuperet ſumptum ſpatium minori omni propoſito ſpatio ; & rurſus inſcribere, ita ut ſumptum ſpatium majus ſit, quam in ſcripta figura, minori quovis propoſito ſpatio.

Prop. XXIII.

Fig. 96. *Sumpto ſpatio* (C A G) *comprehenſo ſub helice, quæ minor eſt deſcriptâ in prima revolutione, non habenti pro termino principium helicis, & ſub rectis* (A C, A G) *ductis à principio helicis ; poſſibile eſt ſpatio figuram circumſcribere, ſimilibus è ſectoribus compoſitam & aliam inſcribere ita ut circumſcripta figura ſuperet inſcriptam minori quàm quocunque propoſito ſpatio* (X).

Rectæ A D, A E, A F æqualiter ſecent angulum C A G, vel arcum K G, ita ut ſector *g* A G ⊐ X ; & centro A per C, D, E, F ducantur arcus C κ, *d* D δ, *e* E ε, *f* F φ, & (ſicut in præcedentibus) planiſſimè liquet propoſitum.

Coroll.

Hinc manifeſtum eſt, quòd circa dictum ſpatium figuram planam deſcribere licet, qualem diximus, ut circumſcripta figura major ſit ſpatio, minori quam propoſito quovis ſpatio.

Prop. XXIV.

Fig. 97. *Spatium ſub helice* (A B C D Z) *in prima revolutione deſcripta, & prima recta* (A Z) *quæ eſt in principio revolutionis, tertia pars eſt primi circuli. Spatium dicatur* (S), *& primus circulus* ⊙ *α.*

ppus 21. IV.

Dico

Digitized by Google

Dico primò, non eſt $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset S$. Nam ſi affirmas helici [a]circumſcribatur figura A *b* B *c* C *d* D Z, juxta præſcriptum 21æ hujus, quæ dicatur φ, ita ut ſit $\varphi - S \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha - S$: [b]vel $\varphi \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$. Cùm verò radii A B, A C, A D *&c.* [c]ſeſe æqualiter excedant, & exceſſus æquetur minimo A B, & ſectores (ad ipſos) ſimiles ſint, [d] erunt tot ſectores æquales maximo *z* A Z, quot ſunt omnes inæquales, minores triplo inæqualium, hoc eſt circulus α minor triplo figuræ φ; vel $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \varphi$. at prius affirmâſti eſſe $\frac{1}{3} \alpha \sqsubset \varphi$. ergo tibi contradicis.

[a] *cor.* 21 *huj.*
[b] 4 *ax.* 1.
[c] *ſchol.* 21 *h.*
[d] 3 *cor.* 10 *h.*
[e] 4 & 5 *ax.* 1.

Dico ſecundò, non eſſe $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset S$; ſi hoc affirmas, helici [a]inſcribatur figura A B ϵ C κ Z, quæ vocetur ψ, etiam juxta 21 hujus, ita ut $S - \psi \sqsupset S - \frac{1}{3} \odot \alpha$; [c] vel $\frac{1}{3} \alpha \sqsupset \psi$. atqui ſectores omnes æquales ſectori *z* A Z [d] majores ſnnt triplo totidem inæqualium ſine *z* A Z, hoc eſt $\odot \alpha \sqsubset 3\psi$, vel $\frac{1 \odot \alpha}{3} \sqsubset \psi$. at prius erat $\frac{1}{2} \alpha \sqsupset \psi$, quæ repugnant.

Hoc etiam bellè declarat Pappus in 21. *IV.*

Reſtat igitur, ut ſit $\frac{1}{3} \odot \alpha = S$. *Q. E. D.*

Schol.

Hoc directè perſpicitur è ſcholio ad 10 hujus. Cùm enim ſectores figuræ circumſcriptæ vel inſcriptæ procedant ut 0, 1, 4, 9, 16 *&c.* (in duplicata ſcilicet radiorum proportione) & quò deſinant in ſpatium helicis, eorum numerus fit infinitus, ideo totidem eorum maximo æquales, hoc eſt totus circulus, eorum omnium triplus eſt, hoc eſt ipſius ſpatii, ab helice comprehenſi, triplus.

Eleganter hoc etiam colligitur methodo indiviſibilium. Dividatur enim radius A Z in partes quotlibet æquales punctis *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*; & centro A per iſta puncta deſcribantur arcus *b* B, *c* C, *d* D, &c. occurrentes helici punctis B, C, D, E, F, G, H. Eſtque arcus *c* C quadruplus arcûs *b* B (ob radium *c* A duplum radii *b* A, & angulum *c* AC duplum anguli *b* A B), & arcus *d* D noncuplus arcûs *b* B; & ſic perpetuò juxta ſeriem 0, 1, 4, 9, 16 &c. uſque ad maximum *zz*. quare ſi numerus horum arcuum infinitus ſit (vel ſi per omnia radii A Z puncta tranſeant) erit eorum ſumma ſubtripla totidem æqualium maximo; hoc eſt radii ducti in circumferentiam circuli Z Z, hoc eſt dupli circuli ZZ. ergo ſpatium ex iis conſtans eſt $\frac{2}{3}$ circuli ZZ, & reliquum intra helicem eſt $\frac{1}{3}$ ejuſdem. Exhinc patet magna ſpiralem inter & parabolen affinitas; nam ſi A X ſit axis *parabolæ* A B C D E F G H Z, cujus vertex A, tangens A Z, & per puncta diviſionum *b*, *c*, *d*, &c. ducantur ad axem parallelæ A B, *c* C, *d* D &c. Erit *c* C = 4 *b* B

Fig. 97.

Fig. 98.

Digitized by Google

bB, & dD $= 9\,b$B &c. dD $= 16\,b$B; eâdemque ſic perpetuò ratione ſicut in ſpirali; adeò quidem ut ſi recta b B hîc æquetur arcui b B iſtic; ſint omnes rectæ c C, d D &c. arcubus reſpectivis c C, d D &c æquales. unde ſpiralis nihil eſt aliud quàm parabole, cujus parallelæ axi rectæ in circulares arcus, circa verticem A veluti centrum, contorquentur. Unde non adeò mirum eſt innumeras ſpiralis affectiones cum paſſionibus parabolæ conſpirare. Mihi ſufficiet hoc obiter ſubnotâſſe; qui plura volet, adeat *Gregorium Vincentium, Cavallerium, Torricellium,* alioſque.

Coroll.

Fig. 99. Simili planè diſcurſu, ſi à centro A ducatur in primæ revolutionis helicem recta quævis A G; & centro A per G deſcribatur circulus E F G, occurrens revolutionis principio A Z in E; erit ſpatium concluſum helice A B G, & rectâ A G ſubtriplum ſectoris A E F G A.

Prop. XXV.

fig. 95. *Spatium* (Σ) *ſub ſpirali* (Z M N O P R Y) *& recta* (Z Y) *ſecunda in principio revolutionis ad ſecundum circulum* (ϛ) *hanc habet rationem, quam habet 7 ad 12;* quæ eadem eſt, quam habent utraque ſimul, quodque comprehenditur ſub radio ſecundi circuli* (A Y), *& radio primi circuli* (A Z), *& tertia pars quadrati, quod ab exceſſu* (Z Y) *quo radius ſecundi circuli excedit radium primi circuli, ad quadratum à radio ſecundi circuli.*

* *ſchol.* 11 *b.*

Si fieri poteſt, ſit primò $\odot$ rad $\surd\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq \sqsubset \Sigma$. [a]Circumſcribatur igitur ſpatio figura (quam voca φ) conſtans ſectoribus, qualis in 22 hujus, ita ut $\varphi - \Sigma \sqsupset \odot$ rad $\surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq - \Sigma$. [b]vel $\varphi \sqsupset \odot$ rad $\surd\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. Cùm verò rectæ A Z, A M, A N, A O &c. [c] ſeſe æqualiter excedant, & ſuper iis (exceptâ minimâ A Z) conſtituti ſimiles ſectores componant figuram φ, & totidem æquales maximo γ A Y conficiant circulum ϛ; [d]erit $\odot$ ϛ. $\varphi \sqsupset AYq.\ AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$ [e] $::\ \odot$ ϛ. $\odot$ rad $\surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. [f] quare $\varphi \sqsubset \odot$ rad $\surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. Erat verò $\varphi \sqsupset \odot$ rad $\surd\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$, quæ repugnant.

a cor. 22 huj.
b 4. ax. 1.
c ſch. 22 huj.
d cor. 11. huj.
e cor. 2. 12.
f 10. 5.

Sin dicatur $\odot$ rad $\surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq \sqsupset \Sigma$. Inſcribatur figura ψ, [a]ita ut ſit $\Sigma - \psi \sqsupset \Sigma - \odot\ \surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. [e] quare $\odot$ rad $\surd{:}\, AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq \sqsupset \psi$. atqui hîc ſectores ſimiles ad A Z, A M, A N &c. ſine mazimo γ A Y conſtituunt figuram ψ, & totidem maximo pares circulum ϛ. ergo $\odot$ ϛ. $\psi \sqsubset \odot$ ϛ. $\odot$ rad $\surd{:}\, AY$

e 4 & 5, ax. 1.

$\times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. & proinde $\not\sqsupset \odot$ rad $\surd: AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. quod itidem prædictis repugnat.

Quin igitur potiùs eſt $\odot$ rad $\surd: AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq = \Sigma$. unde $\Sigma. \odot\beta :: {}^{c}AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq. ZYq$ * $:: 7. 12$. *Q.E.D.* **ſch.* 11 *huj.*

Coroll.

Eodem autem modo demonſtrabitur, quòd comprehenſum ſpatium ſub helice per quamcunque revolutionem deſcripta, & rectâ eodem numero, quo revolutio, denominatâ, ad circulum itidem eodem numero denotatum, quo revolutiones; rationem habet, quam utraq; ſimul, quódque ſub radio circuli ejuſdem numeri, & radio circuli numero, qui unitate minor ſit numero revolutionum, denominat; & tertia pars quadrati quod ab exceſſu, quo excedit radius majoris circuli dictorum radium minoris è dictis circuli ad quadratum radii majoris circuli dictorum. Nempe ſpatium $\alpha\beta\gamma$ ſe habebit ad circulum tertium, ut $AX \times AY + \frac{1}{3} YXq$ ad AXq; & ſpatium $\alpha\beta\gamma\delta$ ſe habebit ad circulum quartum, ut $AV \times AX + \frac{1}{3} XVq$ ad AVq.

Coroll.

Hinc ipſa ſpatia inter ſe erunt ut $\frac{AZq}{3}$, $AY \times AZ + \frac{ZYq}{3}$, $AX \times AY + \frac{YXq}{3}$, $AV \times AX + \frac{XVq}{3}$ &c. Nam ſp. $\alpha = \frac{AZq}{3} \times \frac{\odot\alpha}{AZq}$.

$$\&\ \text{ſp.}\ \beta = \left(AY \times AZ. + \frac{ZYq}{3}\right) \times \frac{\odot\beta}{AYq}.\ \&\ \text{ſp.}\ \gamma = \left(AX \times AY + \frac{YXq}{3}\right) \times \frac{\odot\gamma}{AXq}.$$

$$\text{at}\ \frac{\odot\alpha}{AZq} = \frac{\odot\beta}{AYq} = \frac{\odot\gamma}{AXq}\ \&c.$$

Hinc confici poſſit Tabella rationes exprimens quas habent ſpatia *helicibus*, & *rectis* comprehenſa ad circulos ejuſdem ordinis, & ad ſe invicem, quæ talis eſt. (quòd ſi horum ſpatiorum primum ſubtrahatur è ſecundo, ſecundum è tertio, & ita deinceps, reliqua ſe habebunt juxta columnam ultimam; quæ nempe ſpatia reſpicit propoſitio 27ª ſubſequens).

	Circuli.	*Spatia.*	*Reſidua.*
1.	3	1	1 α.
2.	12	7	6 β.
3.	27	19	12. γ
4.	48	37	18. δ
5.	85	61	24
6.	108	91	30
7.	147	127	36
8.	192	169	42
9.	243	217	48
10.	300	271	54

Prop. XXVI.

Fig. 96. *Comprehenſum ſpatium* (C A G) *ſub helice* (C G) *quæ minor eſt deſcriptâ in una revolutione, non habens terminum principium helicis* (A), *& rectis* (A C, A G) *à terminis ejus ad principium helicis ductis, ad ſectorem* (K A G) *radium quidem habentem æqualem majori* (A G) *ductarum à termino ad principium helicis, arcum verò* (G K) *ductis rectis interceptum, ad eaſdem partes cum helice; hanc habent rationem quam habent utraque ſimul, quodque continetur ſub rectis* (A G, A C) *à terminis ad principium ſpiralis ductis, & tertia pars quadrati ab exceſſu quo major dictarum ſuperet minorem ad quadratum majoris* (A G) *à terminis ad principium helicis conjunctarum.*

Sector ipſi K A G ſimilis & cujus radius ſit $\surd$: A G × A C + $\frac{1}{3}$
a cor. 23 h. C Kq vocetur ξ: &, ſi fieri poteſt, ſit ξ major ſpatio C A G. [a] Circumſcribatur figura qualis in 23 hujus, (quæ nominetur φ) ita ut ſit
b 4. ax. 1. φ — ſp. C A G $\sqsupset$ ξ — ſp C A G. [b]vel φ $\sqsupset$ ξ. Cùm verò ſint rectæ A C, A D, A E &c. æquali progredientes exceſſu, à quibus præterquam à minima A C, deſcripti ſimiles ſectores componunt figuram φ, totidemque æquales maximo faciunt ſectorem K A G, [c]erit ſect. K A G.
c cor. 11 huj. φ $\sqsupset$ A Gq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq :: ſect K A G. ξ. unde φ $\sqsubset$ ξ.
A K.
contra conſtructionem.

Sin dicatur ſpatium C A G majus dicto ſectore ξ, [a] inſcribatur figura quædam ψ, ita ut ſp C A G — ψ $\sqsupset$ ſp. C A G — ξ; adeóque ξ $\sqsupset$ ψ. atqui jam ſect K A G. ψ $\sqsubset$ ſect K A G. ξ. unde contra conſtructionem, ψ $\sqsupset$ ξ. Ut hæc igitur vitentur abſurda, erit ξ = ſp C A G; & idcirco ſp C A G. ſect K A G :: ſect ξ. ſect K A G :: A G $\times$ A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. A Gq. *Q. E. D.*

Coroll.

Spatium K C G. C A G :: A C $\times$ C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. A G $\times$ A C + $\frac{1}{3}$ C Kq.

Nam A Kq [a] = A Cq + 2 A C $\times$ C K + C Kq. Pro A Cq + A C $\times$ C K [b] ſubſtituatur æquale A C $\times$ A K; eſtque A Kq = A C $\times$ A K + A C $\times$ C K + C Kq ergò ſect K A G. ſp C A G [c] :: A C $\times$ A K + A C $\times$ C K + C Kq. A G $\times$ A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. & dividendo
A G
ſp K C G. ſp C A G :: A C $\times$ C K — $\frac{2}{3}$ C Kq. A G $\times$ A C + $\frac{1}{3}$ CKq,

a 4. 2.
b 3. 2.
c 27 *hujus &*

Prop. XXVII.

Spatiorum comprehenſorum ſub helicibus & rectis, quæ in revolutione, tertium quidem (γ) ſecundi (β) duplum eſt, quartum verò (δ) triplum, quintum autem quadruplum; & perpetuò ſubſequens ſecundum numeros qui deinceps, multiplex eſt ſecundi ſpatii; primum verò ſpatium (α) ſexta pars eſt ſecundi (β). *Vid. not. ad 5 def. hujus. fig. ad coroll. 25.*

Clariſſimè patet horum veritas è tertia columna tabellæ ſuprapoſitæ, è 25 [a] deducta. quid plura?

Prop. XXXVIII.

Si in helice (A C G Z) *ex una quacunque revolutione deſcripta ſumantur duo puncta* (C, G) *quæ non ſunt ipſius termini, à ſumptis verò punctis connectantur rectæ* (A C, A G) *ad helicis principium* (A); *& centro quidem principio helicis, intervallis verò* (A C, A G) *ductis à punctis ad principium helicis deſcribantur circuli* (C L N, K G M) *ſpatium* (K G C) *comprehenſum ſub majori arcu* (K G) *intercepto rectis* (A C, A G) *& helice rectis iiſdem interjectâ, & rectâ* (C K) *productâ, hanc habebit rationem ad ſpatium* (L C G) *comprehenſum ſub minori arcu* (L C), *& eadem helice & rectâ* (G L) *connectente terminos ipſorum, quem radius* (A C) *minoris circuli cum duabus tertiis exceſſûs* (C K) *quo radius majoris circuli excedit minoris circuli radium* Fig. 101.

Digitized by Google

ad radium minoris circuli cum una tertia parte ejuſdem exceſſus (CK).

a cor. 27 *b.*
b 26 *hujus.*
c *ſch.* 2. 12
d *ſch.* 19. 5.
* 3, 2. & 3 *ax.* 1.
f 1. 6.

Nam ſp. K G C. ſp. C A G[a] :: A C × C K $+\frac{2}{3}$CKq. A K × AC $+\frac{1}{3}$ CKq. & ſp C A G. ſect K A G[b] :: A G × A C $+\frac{2}{3}$ C Kq AGq; ac ſect. K A G. ſect. C A L[c] :: A Gq. A Cq. ergo ex æquo ſp KGC. ſect C A L :: A C × C K $+$ $\frac{2}{3}$ C Kq. A Cq. [d] ergo ſp K G C. ſp C A G—ſect. C A L :: A C × C K $-\frac{2}{3}$C Kq. A K × A C $+\frac{1}{3}$CKq
A
—A Cq: hoc eſt ſp K G C. ſp L C G :: A C × C K $+\frac{2}{3}$ C Kq. *AC × C K $+\frac{1}{3}$ C Kq[f] :: A C $+\frac{2}{3}$ C Kq. A C $+\frac{1}{3}$ C Kq. *Q.E.D.*

Theorema.

Pappus 22. *IV.* *Si ab helicis* A B Z *principio ducantur utcunque rectæ* A D, A C,
Fig. 102. *erunt ſpatia* A B D A, A B C A *inter ſe, ut cubi è rectis* A D, A C.

a cor. 24 *hujus.* & 15. 5.
b 20. *def.* 5.
c *ſch.* 2. 12.

Centro A per D, C ducantur circuli F N D, E M C ſecantes A Z in E, F; eſtque ſpatium A B D A. A B C A[a] :: ſect. A F N D A. A E M C A[b] = A F N D A. A E M K A + A E M K A. AEMCA =[c]A Dq A Kq $+$ [c]A D. A K = A D cub. | A K cub.
| A C cub.

Pappus 35. *IV.* *Per helicem cùm alia difficilia Geometriæ Problemata, tum hoc præcipuum conficitur.*

Problema.

Fig 103. *Datum (angulum, vel) arcum* Z M G *ſecare in datam rationem.*

a cor. 14. *huj.*
b 7. 5,
c *conſtr.*

Ducantur à centro A rectæ A Z, A C, & A G ſecet helicem ABZ in C; & ratio A E ad A C æquetur datæ, & centro A per E ducatur arcus circuli E B ſecans helicem in B; & ab A per B ducatur recta A B F; & liquet eſſe arc Z M F. arc F G[a] :: (A B. E C[b] ::) A E. E C, [c]hoc eſt in data proportione.

De Conoidibus & Sphæroidibus.

Archimedes Doſitheo, S.

MItto ad te conſcriptas à me hoc in libello cùm reliquorum Theorematum Demonſtrationes, quas inter priùs miſſas non habebas, tum aliorum poſtea repertorum, quæ quidem ſæpe jam antea aggreſſus contemplari, cùm difficultatis aliquid habere videretur ipſorum inventio, ferè deſperavi; quamobrem neque cum aliis edita ſunt, quæ proponebantur: poſtea verò diligentiùs iis incumbens, inveni de quibus hæſitaveram. Erant autem è prioribus Theorematis reliqua circa *Conoides rectangulum* propoſita, hæc verò jam tandem inventa verſantur circa *Conoides hyperbolicum*, & *figuras Sphæroides*, quarum aliquas quidem oblongas, alias verò oblatas voco.

Definitiones, & Hypotheſes.

D*E Conoide utique rectangulo ſupponebantur hæc.*

(Nota: è planis conum diverſimodè ſecantibus ortas in coni ſuperficie lineas, quas *Apollonium Pergæum* ſequuti *Parabolam, Hyperbolam*, & *Ellipſim* jam appellitant, vetuſtiores Geometræ nominârant ſectiones *coni rectanguli, obtuſanguli, acutanguli*; quia ſcilicet, opinor, ſectiones haſce tantùm in cono recto, ſecto a plano ad crus trianguli per axem recto conſiderârunt; quomodo ſemper in cono rectangulo procreabitur *parabola*, in obtuſangulo *hyperbola*, in acu- Fig. 104.
tangulo *Ellipſis*, ut nempe ſi B V A ſit triangulum per axem coni, ſitq; 105.
D E communis ſectio plani ſecantis cum triangulo B V A, & V D 106.

plano

Digitized by Google

plano ſecanti recta ſit, ac ideo angulus V D E rectus; conſtat ſi angulus V rectus ſit, eſſe D E ad V A parallelam, adeóque ſectionem eſſe *parabolam*; ſin angulus V ſit obtuſus, liquet E D cum A V producta convenire ſupra verticem coni, adeóque ſectionem eſſe *hyperbolam*; quòd ſi angulus V fuerit acutus, patet D E occurſuram ipſi V A infra verticem, ac idcirco ſectionem fore *ellipſim*. Talis mihi videtur primitùs impoſitorum iſtorum nominum, * quæ paſſim uſurpat *Archimedes* ratio: nos verò tam brevitati quàm perſpicuitati conſulentes ubique pro deſuetis iſtis & jam minùs appoſitis vocabulis uſitatiora ſubſtituemus & commodiora nomina *parabolæ, hyperbolæ, ellipſis*, quod certè monitum oportere videbatur.)

* *Quamvis haud penitus ignotas Archimedi fuiſſe ſectiones haſce etiam in cono ſcaleno ſatis patet ex 8 & 9 hujus libri, ubi & ellipſis nomen expreſſum habetur.*

I. Si *parabola* manente diametro circumducta reſtituatur denuò unde proceſſerat; à parabola interceptam figuram appellari *conoides parabolicum*; & *axem* quidem illius vocari *manentem diametrum*: *Verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei conoidis.

Exempli gratiâ, *conoidis* B V A producti è revolutione ſemi-parabolæ B V K circa diametrum V K, axis eſt V K, vertex V.

Fig. 107.

II. Si *conoides parabolicum* contingat planum, tangenti autem plano ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abſcindat; interceptam à ſectione conoidis in abſcindente plano planum appellari *baſin abſciſſæ portionis*: *verticem* verò punctum, ad quod alterum planum *conoides* tangit: *Axem* verò ex ducta per verticem ad conoidis axem parallela interceptam in portione rectam.

Parabolicum conoides B V A tangat planum D T in D; & huic parallelum planum G S ſecet; ſitque recta D E *conoidis axi* V K parallela; fit portio S D G, cujus *baſis* S H G, *vertex* D, *axis* D E.

* *Contemplanda verò proponebantur hæc; quòd &c. ſubjicit prop.*

* *τὰς ἔγγιστα vocat author, nos uſitatum jam nomen ſubrogamus.*

III. * De *conoide verò hyperbolico* præſtruebamus hæc: ſi in plano ſit *hyperbola*, ejúſque diameter, & ſectionis * *aſymptoti*, diametro autem manente circumductum planum in quo ſunt dictæ lineæ reſtituatur unde proceſſerat; de *hyperbolæ aſymptotis* perſpicuum eſt, quòd conum *Iſoſcelem* intercipient, cujus vertex erit punctum, in quo *aſymptoti* conveniunt, *axis* verò *diameter manens*: ab *hyperbola* verò interceptam figuram vocari *conoides hyperbolicum*; *Axem* verò diametrum qui manet; *Verticem* autem punctum, in quo axis occurrit ſuperficiei conoidis: Conum verò ab *hyperbola aſymptotis* interceptum, conoidis continentem dici: rectam verò conoidis, & coni ipſum continentis verticibus interjectum axi accedentem nominari.

Fig. 108.

Si *e g. hyperbola* B V A cum *aſymptotis ſuis* C M, C N circa diametrum C V K revolvatur, fiet *conoides hyperbolicum* B V A, ipſumq;

complectens *conus* M C N, cujus *vertex* C, *axis* C K ; ipſius autem *conoidis axis* eſt V K, *vertex* V, axi accedens V C.

IV. Et ſi *conoides hyperbolicum* tangat planum, tangenti autem plano parallelum aliud planum portionem abſcindat conoidis ; planum quidem à ſectione conoidis in abſcindenti plano interceptum appellari *baſin* portionis abſciſſæ ; *verticem* verò punctum quo planum tangens contingit conoides : Axem verò ex ducta per verticem portionis, & verticem coni conoides continentis interceptam in portione rectam, & dictis verticibus interjectam axi accedentem nuncupari.

Fig. 104.

E. G. Conoides hyperbolicum B V A tangat planum T D in D, & huic parallelum S G ſecet, & per hyperbolæ centrum C ducatur recta C D E ; erit facta portio S D G, cujus baſis S H G, vertex D, axis D E, axi accedens D C.

V. *Parabolica* utiq; *conoidea* omnia* ſimilia ſunt. *Hyperbolicorum* verò *conoideon* iſta vocentur ſimilia, quorum continentes coni ſunt ſimiles.

* *Utique ſimilitudinem lato ſenſu capis, aliàs omnia parabolica conoidea non magis ſibi ſimiles ſunt, quàm omnes coni.*

Hinc colligitur *hyperbolarum ſimilium* definitio ex *Archimedis* ſententia ; nempe, Hyperbolæ ſimiles ſunt, quarum figuræ ſimiles, vel quarum latera ſunt proportionalia. *

Fig. 110. 111.

* *vel, quarum diametri conjugatæ ſunt proportionales.*

Sed intellige figuras ad axes ſolos, non ad alias diametros (ſaltem ad ſimiles diametros, hoc eſt eas quæ æquales cum ordinatim applicatis angulos faciunt) conſtitui.

Sint enim hyperbolæ B V A, *b v a* ; quarum aſymptoti C M, C N, & *cm*, *cn* ; axes C K, *ck*, quibus perpendiculares M N , *m n* ; & his parallelæ R S, *r s* per vertices V, *v* ductæ, adeóque tangentes. Sit verò C K, M N :: *ck*, *mn*. ergo coni conoidea hyperbolica, ex hyperbolarum B V A, *b v a* circa axes C K, *ck* revolutione progenita, continentes ſunt ſimiles. Sint autem hyperbolæ B V A latera T. R. & hperbolæ *b v a* latera *t*, *r*. & quia T. R :: C Vq. V Rq :: C Kq. K Mq :: Q.*ck* Q.*km* :: Q.*cv*. Q.*vr* :: *t.r.* liquet eſſe T. R. :: *t.r.* ergo ſimilium hyperbolicorum conoideon hyperbolis convenit habere latera proportionalia. Hæ verò ex *Archimedis* ſententia ſimiles cenſentur.

De *ſphæroidibus* verò *figuris* hæc ſuppoſuimus.

VI. Si *ellipſis* manente majori diametro circumducta reſtituatur eò unde proceſſerat, deſcriptam ab ellipſe figuram appellari *ſphæroides oblongum*. Quòd ſi manente minori diametro circumducta ellipſis reſtituatur unde proceſſit, deſcriptam ab ellipſe figuram vocari *ſphæ-*

Proponitur autem contemplandum quod &c. ſubjicit Prop.

Digitized by Google

ſphæroides prolatum: utriuſque verò ſphæroidis *axem* appellari manentem diametrum: *verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei ſphæroidis: *centrum* verò dici punctum axis medium; & diametrum, ductam per centrum axi perpendicularem.

Sit *e.g. ellipſis* V B X A, cujus major diameter V X minorem B A ſecet pependiculariter in C; ſi circa V X revolvatur *ellipſis*, fiet *ſphæroides oblongum*, cujus *axis* V X, *vertices* V, X; *diameter* B A; ſin verò circa B A rotetur, procreabitur *ſphæroides prolatum*, cujus *axis* B A, *vertices* B, A, *diameter* V X, *centrum* verò utriuſque eſt punctum C.

Fig. 113. VII. Et ſi utrumvis *ſphæroides* contingant parallela plana, non ſecantia; tangentibus autem planis parallelum ducatur aliud planum, ſecans ſphæroides; productarum quidem portionum *baſin* appellari quod à ſphæroidis in plano ſecanti ſectione intercipitur: *vertices* autem puncta, ad quæ parallela plana *ſphæroides* contingunt: *Axes* verò, quæ è recta vertices connectente in portionibus intercipiuntur, rectas.

Sphæroides videlicet Q S D G tangant parallela plana D T, Q Y, & his parallelum planum S H G ſecet; cui occurrat tactus connectens D Q in E; erit ſectio S H G baſis; & D, Q vertices; & DE, QE axes portionum S D G, S Q G.

VIIJ. Similes verò dici *ſphæroides figuras*, quarum axes diametris proportionales ſunt.

Hinc ex *Archimedis* ſententia *ſimiles ellipſes* definiuntur, quarum axes conjugati ſunt proportionales; vel quarum ad axes figuræ ſimiles, vel quarum latera proportionalia.

IX. Similes verò dici *ſphæroideon*, & *conoideon* figurarum portiones, ſiquidem à ſimilibus figuris ablatæ ſunt, & baſes ſimiles habent, & axes ipſorum vel baſium planis recti exiſtentes, vel cum homologis baſium diametris æquales facientes angulos, eandem inter ſe rationem habent, quam homologi baſium diametri.

Sint nempe portiones B V A, *bva* à ſimilibus conoidibus vel ſphæroidibus diremptæ, quarum axes V K, *vk* cum baſium diametris B A, *ba*; & H F, *hf* æquales faciant angulos; & ſit V K. *vk* :: B A. *ba* :: H F. *hf*; juxta definitionem hanc ſimiles erunt hæ portiones. Fig. 114. 115.

Proponitur & de ſphæroideis hæc ſpeculari, quòd *&c.* (ſubjicit prop. . . . .)

Dictis verò theorematis demonſtratis per ipſa reperiuntur complura cùm theoremata tum problemata, quale eſt hoc: quòd *ſimilia ſphæroidea*, nec non *ſimiles ſphæroideum*, ac *conoideum* portiones *triplicatam* *inter ſe rationem habent axium.* Et, *quòd in ſphæroidibus figuris æqualibus quadrata diametrorum proportione reciprocantur axibus*; &, *ſi in ſphæroidibus figuris quadrata diametrorum reciprocentur axibus æqualia ſunt ſphæroidea.* *Problema* verò hujuſmodi: *A datâ portione ſphæroidis aut conoidis, portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono, vel cylindro, vel datæ ſphæræ.* Præmittentes igitur & *theoremata*, & **epitagmata* ad eorum demonſtrationes uſum habentia, poſtea tibi *problemata* conſcribemus. Vale.

** hoc eſt, Propoſitiones Lemmaticas, vel ſubſidiarias.*

X. Si *conus* plano ſecetur in omnia coni latera incidenti, ſectio vel *circulus* erit vel *ellipſis*: & ſiquidem igitur ſectio ſit *circulus*, liquet interceptam ab ipſo portionem verſùs verticem coni, fore conum. Si verò ſectio ſit *ellipſis*, è cono ad verticem dirempta figura dicatur *abſegmentum* coni: Abſegmenti verò baſis dicatur *planum* ab *ellipſe* comprehenſum: *vertex* verò punctum, quod & coni *vertex* eſt: *Axis* verò à vertice coni ad centrum ellipſis connexa recta.

ἀπότμημα.

XI. Ac, ſi *cylindrus* duobus planis parallelis ſecetur in omnia cylindri latera incidentibus, ſectiones vel *circuli* erunt, vel *ellipſes æquales*, & mutuò ſibi ſimiles. Siquidem igitur ſectiones circuli fiant, patet quòd reſecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit: ſin verò ſectiones fiant *ellipſes*, abſumpta à cylindro figura inter parallela plana cylindri ſegmentum vocetur: *baſes* autem ſegmenti vocentur plana ſub *ellipſibus* comprehenſa: *Axis* autem recta *ellipſium* centra connectens. (Erit autem hæc in eadem recta cum axe cylindri.)

Hæc clara ſunt, nec explicationem deſiderant. Videntur autem loco ſuo excidiſſe; nos ea certè non immeritò definitionibus ac hypotheſibus accenſemus. Non ſunt *epitagmata*, quæ pollicetur *Archimedes*, ut exiſtimat non nemo.

Prop. I.

Si quotlibet ſint magnitudines (a, b, c, d) *æquali ſeſe excedentes, ſit autem exceſſus æqualis minimæ* (a); & *aliæ magnitudines multitudine quidem æquales his, magnitudine verò æquales maximæ* (d); *omnes magnitudines, quarum unaquæque æquatur maximæ, omnium quidem æqualiter ſeſe excedentium minores erunt quàm duplæ; reliquarum autem ſine maximâ majores quàm duplæ.*

Fig 116.

Digitized by Google

Nam ſumma omnium æqualium maximæ eſt

$$\begin{array}{c} d \\ c+a \\ b+b \\ a+c \\ \hline \end{array}$$

hoc eſt $d+2c+2b+2a$; quæ ſumma deficit à dupla omnium per maximam d, & reliquarum duplam eodem exceſſu ſuperat.

Schol.

$$\begin{array}{l} 0.3.6.9. \\ \underline{9.6.3\ 0.} \\ 9.9.9.9. \end{array}$$

1. Si quantorum talis ſeries (hoc eſt Arithmeticè proportionalium) incipiat à o (ſeu nihilo) & maximus terminus ſit d, numerus autem terminorum dicatur n; ſumma terminorum erit $\frac{nd}{2}$. quæ propoſitio nihil fermè differt ab hac *Archimedea*.

$$\begin{array}{l} a+0. \\ a+1x. \\ a+2x. \\ a+3x. \end{array}$$

2. Sit quælibet ſeries Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus ſit a communis exceſſus x, & numerus terminorum dicatur n; liquet omnium ſummam eſſe $na+\dfrac{\left.\begin{matrix} nn \\ -n \end{matrix}\right\}}{2}x$.

Nam hæc ſumma conſtat ex ſerie æqualium, & ſerie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus eſt $nx-1x$.

Prop. II.

* *rationem habeant.*

A.B.C.D. E.F.G H.
K.L.M. N.O.P.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) *aliis magnitudinibus multitudine æqualibus* (E,F,G,H) *bina binis, prout ordine diſponuntur, proportionales ſint* A.B::E.F *&* B.C :: F.G *&c*); **referantur verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines* (K, L, M) *vel omnes, vel ipſarum aliqua in quibuſvis rationibus, (ita ut) homologæ ſint in iiſdem rationibus* (A.K :: E.N. & B.L :: F.O *&c.*) *Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuſcum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes poſteriores magnitudines ad omnes quas ipſæ reſpiciunt.*

Nam ob K. A [a]:: N.E. & A.B [b]::E.F. & B.L [b] :: F.O. erit ex æquo K.L :: N.O. Similique diſcurſu L.M :: O.P. Eſt autem A+B+C+D. A [c]:: E+F+G+H.E. & A. K [b]:: E. N. & K. K+L.

[a] hyp & cor. 45

[b] hyp.

[c] 18. 5.

$+ M^{c} :: N . N + O + P$. ergo ex æquo $A + B + C + D . K + L + M :: E + F + G + H . N + O + P$. *Q.E.D.*

Prop. III.

Si quotcunque ſint lineæ (X) *æquales inter ſe, & earum unicuique ſpatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò* (A,B,C,D) *exceſſuum æquali ſeſe excedant, & ſit exceſſus æqualis minimo* (A); *ſint verò etiam alia ſpatia, multitudine quidem æqualia his, ſed magnitudine ſingula æqualia maximo* ($DX + Dq$)*: hæc ad omnia quidem alia ſpatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet æqualis utrique ſimul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni æqualium, ad æqualem utrique ſimul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & ſemiſſi unius æqualium; ad reliqua verò ſpatia ſine maximo majorem rationem habebunt, eâdem ratione.* Fig. 117.

Hoc eſt (ſi linearum multitudo dicatur n, & inæqualium ſpatiorum aggregatum dicatur Z) erit $nDX + nDq . Z \sqsupset X + D . \frac{1}{2} X + \frac{1}{3} D$. &, $nDX + nDq . Z -: DX + Dq \sqsubset X + D . \frac{1}{2} X + \frac{1}{3} D$.

1. Nam quia ^{a}ſunt AX, BX, CX, DX ut A, B, C, D; hoc eſt juxta primam hujus ^{b}, erit $AX + BX + CX + DX \sqsubset \frac{nDX}{2}$. ^{c} item $Aq + Bq + Cq + Dq \sqsubset \frac{nDq}{3}$. eſt verò $Z \overset{d}{=} AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq + DX + Dq$. ^{e} ergo $nDX + nDq . Z \sqsupset \left(nDX + nDq . \frac{nDX}{2} + \frac{nDq}{3} :: \right) X + D . \frac{X}{2} + \frac{D}{3}$. *Q.E.D.* a 1. 6. b 1 hujus. c 1 cor. 10. de Helic. d hyp. e 8. 5.

2. Porro, quia $AX + BX + CX \overset{b}{\sqsupset} \frac{nDX}{2}$, & $Aq + Bq + Cq \overset{f}{\sqsupset} \frac{nDq}{3}$. ^{e} erit $nDX + nDq . AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq$ (^{d}hoc eſt $nDX + nDq . Z -: DX + Dq$) $^{e} \sqsubset nDX + nDq . \frac{nDX}{2} + \frac{nD}{3} :: X + D . \frac{X}{2} + \frac{D}{3}$. *Q.E.D.* f 2 cor. 10 de helic.

Digitized by Google

Prop. IV.

Fig. 118. *Si ab eadem parabola quomodocunque duæ reſecentur portiones* (B V A, S D G) *quæ æquales habeant diametros* (V K, D E); *tam ipſæ portiones æquales erunt, quàm ipſis inſcripta triangula* (B V A, S D G) *baſim habentia eandem cum portionibus, & eandem altitudinem.*

Sit primùm A K ad V K perpendicularis; & R, S ſint parametri
a ſch 49. 1. Apol. diametrorum V K, D E ergo ductâ G L ad D E (protractam) perpendiculari, eſt G Eq. G Lq[a] :: S. R :: [b]S × V K. R × V K[c] :: S × DE.
b 1. 6. R × V K[d] :: G Eq. A Kq. [e]unde G L = A K [f]ergo triangula G D E.
c 7. 5. A V K æquantur, & horum dupla triangula G D S, A V B; & ho-
d 11 & 49. 1. Apol. rum ſeſquialteræ parabolæ G D S, A V B. *Q.E.D.* Simili diſcurſu
e 9. 5. quævis alia portio parem habens ipſi V K diametrum portioni B V A,
f 1. 6. adeóque portioni S D G æquabitur: unde conſtat propoſitum.

Cor. Si diametri V K, D E portionum æquentur, perpendiculares G L, A K æquabuntur.

Prop. V.

Fig 119. 120. *Omne ſpatium comprehenſum ab ellipſe* (V B X A) *ad circulum* (V ς X α) *habentem diametrum æqualem majori ellipſis diametro* (V X) *eandem rationem habet, quam minor ejus diameter* (B A) *ad majorem* (V X), *hoc eſt ad circuli* (V ς X α) *diametrum.*

* *intellige ſpatio Elliptico.* Dico circulum diametro Z = √ V X × B A æquari *ellipſi. Si ne-
a 8. 1. de ſph. gas, eſto primùm circulus Z major ellipſe; circulo igitur Z[a] inſcriptum cogita polygonum parilaterum majus ellipſe, & huic ſimile aliud
circulo (V ς X α), à cujus angulis demittantur perpendiculares μ D,
ν E &c. occurrentes ellipſi punctis M, N &c. & connectantur B M,
M N, N V &c. Eſtque jam ς Cq. μ Dq[c] :: X C × C V. X D × D V
c 21. 1. Apoll. [c]:: B Cq. M Dq. & permutando ς Cq. B C q :: μ Dq. M Dq. unde
d 1. 6. ς C. B C ([d]hoc eſt triang ς D C. B D C) [e] :: μ D. M D ([d] hoc eſt
e 22. 6. triang μ ς D. M B D). [f] quare ς C. B C :: trapezium ς C D μ B C D M.
f 12. 5. Simili diſcurſu eſt trap μ D E ν. M D E N :: μ D. M D :: ς C. B C.
idemque pariter oſtendetur de reliquis trapeziis ac triangulis. [f] quare
g 1. 6. totum polygonum circuli V ς X α ad totum polygonum ellipſis ſe ha-
h 1. 12. bet ut ς C ad B C, vel V X ad B A; [g] hoc eſt ut V Xq ad V X × B A,
k 9. 5. [h] hoc eſt ut polygonum circuli V ς X α ad polygonum circuli Z. [k] ergo

o polygonum circuli Z ellipſis polygono æquatur; Sed majus erat l 9. ax. 1.
oto ſpatio elliptico, quæ repugnant. Similis continget repugnantia,
ſi dicatur ellipſis major circulo Z; inſcribendo ſcilicet ellipſi figuram
quæ major ſit circulo Z, & per ejus angulos ducendo perpendiculares; D M μ E N ν, &c. & inſcribendo circulo Z figuram ſimilem
ipſi V ν μ ς X; unde demonſtrabitur figura ellipſis æqualis figuræ circuli Z, quæ tamen toto circulo Z major ponebatur: ergo potiùs
circulus Z ellipſi æquatur. Hinc ellipſis ſe habet ad circulum V ς X α,
[p] ut circulus Z ad circulum V ς X α, [q] hoc eſt ut Zq [r] vel V X × B A
ad V Xq, [s] hoc eſt ut B A ad V X. *Q. E. D.*

p 7. 5.
q 2. 12.
r hyp.
s 1. 6.

Facilè colligitur hoc viâ indiviſibilium. Quoniam ς Cq. μ Dq ::
X C × C V. X D × D V :: B Cq. M Dq. erit ς C. B C :: μ D. M D
:: ν E. N E. * :: ς C + μ D + ν E. B C + M D + N E. & omnes ς C, μ D, ν E componunt ſemicirculum V ς X, omnes verò B C,
M D, N E conficiunt ſemiellipſim V B X; ergo ſimicirculus ad ſemiellipſim ſe habet ut ς C ad B C; vel ut ς α ad B A.

21. 1. Apoll.
* 12. 5.

Prop. VI.

Omne ſpatium comprehenſum ab ellipſe (V B X A) *ad quemlibet circulum* (Z) *eandem habet rationem, quam comprehenſum ab ellipſis diametris* (V X, B A) *rectangulum ad quadratum* (Zq) *diametri circuli.* Fig. 121.

Nam ell. V B X A. ⊙ V ς X α [a] :: B A. V X [b] :: B A × V X. V Xq
& ⊙ V ς X α. ⊙ Z [c] :: V Xq. Zq. ergo ex æquo ell. V B X A. ⊙ Z ::
B A × V X. Zq. *Q. E. D.*

a 5. hujus.
b 1. 6.
c 2. 12.

Prop. VII.

Sub ellipſibus (A B C D, E F G H) *comprehenſa ſpatia eandem inter ſe rationem habent, quam comprehenſa ab ellipſium diametris rectangula* (A C × B D, E G × F H) *inter ſe.* Fig. 122. 123.

Sit quivis circulus diametro Z; éſtque A C × B D Zq [a] :: ellipſ.
A B C D. ⊙ Z. & Zq. E G × F H [a] :: ⊙ Z. ellipſ E F G H. ergo ex
æquo A C × B D. E G × F H :: ellipſ A B C D. E F G H. *Q. E. D.*

a 6 hujus.

Coroll.

Hinc liquet comprehenſa ſub ellipſibus ſimilibus ſpatia homologorum diametrorum quadratis proportionalia fore.

Nempe poſito fore A C. B D :: E G. F H; erit ellipſ A B C D. E F G H :: A Cq. E Gq :: B Dq. F Hq. Nam A C × B D. B Dq :: A C. B D :: E G. F H :: E G × F H. E Hq & permutando AC × BD. E G × F H :: B Dq. F Hq, hoc eſt ellipſ A B C D. E F G H :: BDq. F Hq, vel A Cq. E Gq.

Lemmata.

I.

Fig. 124.

a 13. 1 *Apol.*
b 4 *def.* 11.
c 18. 11.
d 19. 11.
e 6. 11.
f 3. *def.* 11.
g 4 & 22. 6.

Sit conus Scalenus, in quo B V A triangulum per axem rectum baſi B F A; recta verò V K biſecet angulum B V A, & B D ſit ad V K perpendicularis; ſi igitur per B D tranſeat planum B E D triangulo B V A rectum, [a]patet ellipſim fieri, cujus centrum C minor axis B D; quòd ſi ducatur C E ad B D perpendicularis in dicto plano B E D, erit C E ſemiaxis major; & C E plano V B A [b]recta erit, [c]adeóque planum per V C, C E plano V B A quoque rectum erit. Producatur V E, occurrens baſi coni in F, & connectatur F K. [d] liquet F K (communem nempe ſectionem planorum (B F A, V C E) rectam eſſe plano V B A; [e]adeóque parallelam ipſi C E, [f] & perpendicularem ipſi B A. Eſt [g]igitur K Fq (B K × K A). V Kq :: C Eq. C Vq. Hæc analyſis eſt *Archimedei* quod ſubſequitur *problematis*, perſpicuitatis ergò appoſita; quali ſimilem decimæ propoſitionis intelligentiæ conducentem, hujus exemplo, tibi deducendam relinquimus.

II.

Fig. 125.

Recta VC biſecet angulum B V A, & B D ad V C perpendicularis ſit; oportet per B ducere rectam B A occurrentem rectæ V C protractæ in K, ita ut V Kq ad B K × K A rationem habeat datam V Cq ad Tq.

a 13. 6.
b 35. 3.
c *conſt.* & 15. 1
d 4. 6.
e 16. 6.
f *conſt.* & 17. 6.
g *ſch.* 23. 6.
h 7. & 11. 5.
l *conſt.* & 5. 1.
m 16. 1.
n *ſch.* 6. 6.
o *ſch.* 16. 6.

Fiat V C. T [a]:: T. C H; & ad C H [b]deſcribatur ſegmentum circuli capiens angulum æqualem angulo C V B, & ſecet iſte circulus rectam V D in M; & ductis M C N, M H, fiat B A ad N M parallela. Dico factum. Nam ob [c]æquiangula triangula C V N, C M H, erit V C. M C [d]:: C N C H. unde M C × C N [e] = V C × C H [f] = Tq. Eſt autem V Cq. C M × C N [g] :: V Kq. K B × K A. [h] ergo VCq. Tq :: V Kq K B × K A. *Q.E.F.*

Not. debet eſſe T ⊏ B C. quia quum angulus C D M ſit [l]æqualis angulo C B X, [m]hoc eſt major angulo C N B, [n]erit M C. C D ⊏ C B. C N. [o]adeóque M C × C N ⊏ C D × C B, hoc eſt Tq ⊏ B Cq.

Prop.

Digitized by Google

Prop. VIII.

Datâ ellipſe, & lineâ (C V) à centro (C) ellipſis excitatâ, ad planum, in quo eſt ellipſis, rectâ, poteſt inveniri conus, qui verticem habeat excitatæ lineæ terminum (V) in cujus ſuperficie ſit ellipſis data. Fig. 126.

Sit B D minor axis , & ſemiaxis major ſit T. Jungantur B V, D V, & [a]fiat Tq. C Vq :: B K × K A. V Kq (quod fieri poteſt, quia T ⊏ B C). Erit B A diameter baſis coni, cujus vertex V, qui complectitur datam ellipſim.

a Lemm præc.

Sit enim punctum quodvis L in ellipſe, à quo demittatur L H perpendicularis ad B D [b](adeóque recta plano V B D, cui rectò inſiſtit planum ellipſis). producatur V H M, & aſſurgat M N plano V B A recta, dicti coni ſuperficiem attingens in N. Ducantur denuò per K, M rectæ P Q, R S ad B D parallelæ. Eſtque Tq. C Vq [c] :: B K × K A. V Kq. & [d] C Vq. C Bq :: K Vq. K Pq :: K Vq. K P × K Q. ergo ex æquo Tq. C Bq ([f]hoc eſt H Lq. B H × H D) :: B K × K A. K P × K Q [g] :: B M × M A. R M × M S. Item B H × H D. H Vq [g] :: R M × M S. M Vq. ergo rurſus ex æquo H Lq. H Vq :: B M × M A. M Vq. ([h]hoc eſt) :: M Nq. M Vq. [l]unde H L. H V :: M N. M V. [m] quare V L N eſt recta linea ; [n]adeóque punctum L in ſuperficie coni. Similíque ratione tota ellipſis eſt in eadem ſuperficie. Q.E.F.

b 4. def. 11.
c conſt.
d 4. & 21 6.
e 7. 6.
f 21. 1 Apoll.
g ſch. 23. 6.
h 35. 3. & 7. 5.
l 22. 5.
m conv. 4. 6.
n 1. 1. Apoll.

Prop. IX.

Datâ ellipſe & lineâ (C V) ab ellipſis centro (C) non rectò excitatâ in plano, quod per unam diametrum (B D) aſſurgit rectum plano, in quo eſt ellipſis ; poteſt inveniri conus, verticem habens excitatæ terminum (V), in cujus ſuperficie erit data ellipſis. Fig. 127.

Conjungantur V B, V D, & fiat V A = V B ; & connexâ B A, per C ducatur E F ad B A parallela. Sit autem T altera ſemidiameter datæ ellipſis ; & [a]fiat E C × C F. Tq :: B Aq. Sq ; tum in plano per B A ad planum V B A recto [b]deſcripta ſit ellipſis, cujus axes A B, S. Hanc complectatur conus habens verticem V (juxta præcedentem ; is quoque datam ellipſim comprehendet. Sumatur enim in data ellipſe quodvis punctum L, à quo ducatur L H perpendicularis rectæ B D [c] adeóque recta plano B V D) & extendatur V H M ; & M N recta plano B V A (hoc eſt in plano repertæ ellipſis) coni ſuperficiem attingat in N ; & per M ducatur R S ad B D parallela. Eſtque Tq. E C

a 13. & 12. 6
b 54. 1 Apol.
c 4 def. 11.

Digitized by Google

d *conſt.*
e 15. 5.
f 21. *1 Apoll.*
g *ſch.* 23. 6.
h 22. & *conv.* 4 6.

E C × C F [d] :: Sq. B Aq [e] :: $\frac{1}{4}$SQ, $\frac{1}{4}$ BAq :: [f] MNq. BM × MA. Item E C × C F. B C × C D [g] :: B M × M A. R M × M S. ergo ex æquo Tq. B C × C D ([f] hoc eſt H Lq. B H × H D) :: M Nq. R M × M S. [g] quinetiam B H × H D. V Hq :: R M × M S. V Mq. ergo rurſus ex æquo H Lq. V Hq :: M Nq. V Mq. [h] unde patet punctum L eſſe in latere V N coni; ſimilíque jure tota ellipſis eſt in ſuperficie dicti coni. *Q. E. F.*

Nota, ſi E C × C F = T q, fore B A diametrum circuli, ſeu baſis dicti coni.

Prop. X.

Fig. 128.

Datâ ellipſe, & lineâ (C D) *ab ellipſis centro* (C) *erectâ in plano, quod ab una diametro* (A B) *excitatur rectum plano, in quo eſt ellipſis; poteſt inveniri cylindrus, axem habens in directum excitatæ lineæ* (C D), *cujus in ſuperficie erit data ellipſis.*

a *ſch.* 2 6.
b 4 *def.* 11.
c *hyp.*
d 21. *1 Apol.*
e *ſch.* 23. 6.
f 9. 5.
g 35. 3.
h *conſt.* & 4. *def.* 11.
k 6. 11.

Ducantur A F, B G ad C D parallelæ, quas perpendiculariter ſecet recta F D G; & ob A C = C B, [a] eſt F D = D G. Jam Si F G alteræ ellipſis diametro N O æquetur, erit circulus centro D per F, G deſcriptus, & rectus plano F A B G, baſis cylindri, quem deſideramus. Sit enim quodvis punctum H in ellipſe; à quo ducatur H K ad A B [b] perpendicularis, & per K ducatur K L ad C D parallela; & ſit L M ad F G perpendicularis. & quoniam H Kq. N Cq [c] (F Dq) :: [d] A K × K B. A Cq [e] :: F L × L G. F Dq; erit H Kq [f] = F L × L G [g] = L Mq. ergo H K, L M ſunt pares. Sed & ambæ [h] rectæ ſunt plano F A B G; [k] adeóque parallelæ. ergo liquet punctum H eſſe in latere dicti cylindri per M ducto.

Quòd ſi N O major ſit quàm F G, fiat F P = N O; erit F P diameter baſis cylindri, itidem rectæ plano F D C. quod è ſimili conſtabit diſcurſu.

l *ſch.* 47. 1.
m 18. 11.
n 4 *def.* 11.
o 3. *def.* 11.
p 28. 1.
q *conſtr.*
r 10. 11.
s 4. & 22. 6.

Sin demùm ſit N O minor quàm F G, [l] fiat D X = √: D Fq — C Nq. & plano A C X recta erigatur X R = C N, & connectatur D R; erit circulus radio D R, in plano F D R deſcriptus, baſis cylindri, qui datam ellipſim complectetur. Nam ſtantibus, quæ priùs adſumpta ſunt, ducantur L S ad F G, & S T ad K L protractam perpendiculares. Et quia plana R X D, F D X ſibi mutuò [m] recta ſunt, [n] erit F D recta plano R X D, [o] adeóque lineæ R D; [p] ergo R D, S L parallelæ ſunt. Sed & D X, L T [q] parallelæ ſunt. [r] ergo triangula R D X, S L T ſimilia ſunt. [s] Quamobrem eſt S Tq. S Lq ([g] F L × L G,

* L G) :: R Xq. R Dq (D Fq.) nam eſt R Dq [t] = D Xq + XRq [t] 47. 1.
[d] = D Fq — C Nq + C Nq = D Fq). Item F L * L G. A K * K B [c] ::
F Dq. A Cq. ergo ex æquo S Tq. A K * K B :: R Xq [q] (N Cq)
A Cq [d] :: H Kq. A K * K B. [f] quare S Tq = H Kq. ergo cùm ſint
S T, H K parallelæ (perpendiculares enim ſunt ambæ plano F A K L T.
Nam planum S T L [u] rectum eſt plano F L T; adeóque S T ei re- [u] 15. 11.
cta) ſitque punctum S in ſuperficie dicti cylindri, erit H in eadem, &
pari ratione tota data ellipſis. *Q. E. F.*

Prop. XI.

Quòd quidem omnis conus ad conum compoſitam habeat rationem ex rationibus baſium & altitudinum demonſtratum eſt ab anteceſſoribus; *ſch.* 15. 12.
& non abſimili modo demonſtratur quòd abſegmentum omne coni ad abſegmentum coni rationem habet compoſitam è rationibus baſium & altitudinum. Necnon quòd omne ſegmentum cylindri tripla ſit abſegmenti conici baſim habentis eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem: 10. 12.
eadem ſcilicet eſt demonſtratio cum illa, quòd omnis cylindrus triplus eſt coni baſin habentis eandem cum cylindro, & æqualem altitudinem.

Scholium.

Etiam hæc ſimili diſcurſu eliciantur.

1. Æquè alta ſegmenta cylindrica, & conica, baſibus proportionalia ſunt. *Vid.* 11. 12.

2. Segmenta ad æquales baſes conſtituta ſunt inter ſe ut altitudines. 14. 12.

3. Æqualium ſegmentorum proportione reciprocantur baſes & altitudines. 15. 12.

Similia ſegmenta triplicatam habent rationem homologorum in baſibus diametrorum, (vel axium ſuorum). 11. 12.

Prop. XII.

Si conoides parabolicum ſecetur plano (D V K) *per axem* (V K) *vel ad axem parallelo* (D E G); *fiet coni ſectio eadem illi, quæ figuram intercipit; diameter autem ipſius erit communis ſectio* (V K *vel* D E) *planorum; ejus* (D E G) *quod figuram ſecat, & ejus* (V D E K) *quod per axem ducitur rectum ſecanti plano. quòd ſi etiam ſecetur plano ad axem recto* (B G A) *ſectio erit circulus, habens centrum* (K) *in axe.* *Pars I.* A. Fig. 129.

M Quòd

Quòd plano per axem procreetur parabola eadem illi cujus circumductu fiebat conoides, quódque plano ad axem recto intercipiatur circulus, in axe centrum habens, ſatis ex ipſa conoidis generatione perſpicuò conſtat. Quòd autem ſectio DG ſit parabola, primò poſitæ æqualis ſic oſtendetur. Sumatur in ſectione quodvis punctum G, à
quo ducatur GE ad DE perpendicularis, [a]adeóque recta plano VDE
a 4. def. 11. (cui nempe planum DEG rectum ponitur). Per E ducatur BA ad
b 4. 11. DE, vel VK perpendicularis; [b]ergo DE plano per BE, EG recta
c 8. 11. eſt; [c] ergo axis VK eidem rectus eſt; quare BGA eſt circulus ad
d 35. 3. diametrum BA. Sit demum R parameter parabolæ BVA, & duca-
e 5. 2. tur DZ ad VK perpendicularis. Eſtque EGq [d] $= BE \times EA$ [e] $=$
f 3. ax. 1. $BKq - EKq$ [f] $= BKq - DZq$. Eſt verò BKq [g] $= R \times VK$, &
g 11. 1 Apol. DZq [g] $= R \times VZ$; [f] adeóque $BKq - DZq = R \times ZK = R \times DE$.
h 1. ax. 1. [h] ergo $EGq = R \times DE$. [k] unde ſectio DG erit parabola, cujus pa-
k conv. 11. 1. Apol. rameter R. *Q.E.D.*

Pars 2. B. Fig. 130. *Si conoides hyperbolicum ſecetur plano* (DVK) *per axem* (VK) *vel ad axem parallelo* (DEG) *vel* (*plano* DFH) *per coni conoides complectentis verticem* (C) *erit ſectio hyperbole; ſiquidem per axem eadem erit ei quæ figuram concepit; ſin æquidiſtanter axi, ſimilis illi; at ſi per verticem coni conoides complectentis, diſſimilis ei. diameter autem ſectionis erit communis ſectio* (VK, *vel* DE, *vel* DF) *planorum; ejus quod ſecat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum ſecanti plano. Quòd ſi ſecetur plano* (BGA) *ad axem recto ſectio erit circulus habens centrum in axe.*

Quòd ſectio (DVK) per axem hyperbolam reddit illam, quæ conoides ipſum progenuit; & quod planum axi rectum intercipiat circulum, ſatis evidens eſt. Quòd ſi DE ſit axi parallela; ſint TV, VR latera hyperbolæ DVK, & à D ducatur DZ ad VK parallela; & protractâ ED fiat $DX = TZ + VZ$ $(TV + 2VZ)$. & $TV . VR :: XD . DS$; faciant verò TV, VR, & XD, DS angulos utcunque; & connexæ TR, XS producantur. Sumatur jam in ſecti-
a hyp. & 4 def. 1. one punctum quodvis G; à quo ducatur GE ad DE, [a] (adeóque ad
planum DVK) perpendicularis; & per E ducatur BA ad VK per-
b 35. 3. pendicularis, & EL ad DS parallela; denique per puncta Z, K du-
c 5. 2. cantur ZQ, KP ad VR parallelæ. Eſtque jam EGq [b] $= BE \times EA$
d 12. 1 Apol. [c] $= BKq - EKq = BKq - DZq$ [d] $= VK \times KP - VZ \times ZQ$.
e 1. 6. verùm (ductâ QY ad VK parallelâ) eſt $VK \times KP$ [e] $= VZ \times ZQ$

+

$+ YP + QY \times KP = VZ \times ZQ + VZ \times YP + QY \times KP.$ f 25 ax. 1.
[f] ergo $EGq = VZ \times YP + QY \times KP$. eſt autem [g] $XD, DS ::$ g conſt.
$TV. VR.$ [h] hoc eſt $XE. EL :: QY. YP$; (vel) $:: DE. YP$. [k] ade- h 4.6. & 11.5.
óque $EL \times DE = XE \times YP$ [l] $= TK + VZ \times YP$ [e] $= TK \times YP$ k 16. 6.
$+ VZ \times YP$ (hoc eſt) $= QY \times KP + VZ \times YP$; (ob $TK. KP$ l conſt.
[m] $:: QY. YP$; [k] adeóque $TK \times YP = QY \times KP$) [n] ergo $EGq =$ m 4. 6.
$EL \times DE$. [o] quare liquet punctum G eſſe in hyperbola, cujus latera n 1. ax. 1.
XD, DS, diameter DE; quæ quidem hyperbola ſimilis eſt ipſi o conv. 12. 1 Apol.
BVA, quia $XD. DS$ [l] $:: TV. VR.$ *Q.E.D.*

Coroll. $XD = TV + VZ = 2CZ.$

$$DS = VR + \frac{VR}{TV} 2VZ.$$

Quòd verò plani ſectionem attinet per centrum C ductam, producatur FDC ad N, ita ut ſit $CN = CD$; & ſectionem DVK tangant rectæ VM, DM; & ſumpto in ſectione DF puncto quovis H ducatur HF ad DF perpendicularis, (adeóque recta plano FDVK) & per F ducantur BA ad VK perpendicularis, & FO ad DM pa-
rallela. Eſtque $BF \times FA$. (FHq). FOq [p] $:: MVq. MDq.$ ergo p 16. 3 Apoll.
ordinatim applicatarum FH in ſectione DH quadrata [q] ſe habent ut q 16.5.
quadrata FO in ſectione DO, [r] hoc eſt ut rectangula NFD. [s] ergo r 21. 1 Apoll. & cor. 51 1.
DH eſt hyperbole, cujus ND eſt axis tranſverſus. quia verò EGq s conv. 21.
[t] $\sqsubset FHq$; & $XE \times ED \sqsupset NF \times FD$ (quia $DE \sqsupset DF$ & XD 1. Apoll.
$= 2CZ \sqsupset 2CD$) non erit $EGq. XE \times ED :: FHq. NF \times FD$; [u] hoc t cor. 5. 2.
eſt non erunt harum ſectionum latera ſibi proportionalia; nec ideo u 21. 1. Apoll.
ſimiles erunt. ergo cùm ſectio DG [y] ſit ipſi BVA ſimilis; erit ſectio y priús.
DH eidem diſſimilis. *Q.E.D.*

Si quodvis ſphæroides ſecetur plano (VBXA) *per axem* (VX) Pars 3. C.
vel ad axem parallelo (DEL) *ſectio erit ellipſis, ſiquidem per axem,*
ipſa illa quæ figuram concepit; ſin æquidiſtanter axi, ſimilis ei; dia- Fig. 131.
meter verò ſectionis erit communis ſectio (DE) *planorum; ejus nempe quod ſecat figuram, ejuſq; quod per axem ducitur rectum ſecanti plano: quinetiam ſi ſecetur plano recto ad axem, ſectio circulus erit, habens centrum in axe.*

Primum & ultimum è *ſphæroidis* ortu ſatis liquidò verificantur.

a 16. 3 *Apol.*
b *conv.* 32. *1. Apol.* & 33. 1. *elem.*
c 4 & 22. 6.
d 11. 5.
e *conv.* 21. *1. Apol.*
f *conſtr.*
g 15. 5.

Porro recta A V connectat axium (A B, V X) terminos A, V; & ducatur E S ad A V, & D S ad A B parallelæ. Sumatur autem utcunque punctum L in ſectione, à quo ducatur L H ad D E perpendicularis; & per H recta M N ad V X perpendicularis. demùm rectæ A T, V T ſectionem V A X contingant. Eſtque M H × H N (H Lq) D H × H E [a] :: V Tq. A Tq [b] :: C Aq. C Vq [c] :: D Sq. D Eq. [d] :: H Lq. D H × H E. [e] ergo ſectio D L E eſt ellipſis, cujus axes ſunt D E, D S; & ſimilis ipſi V B X A; quia D S. D E [f] :: C A. C V [g] :: B A. V X.

Pars 4. D.
Fig. 132.

Si dictarum figurarum quælibet plano (B V A) per axem (V K) ſecetur; à punctis (G) in ſuperficie figuræ extra ſectionem exiſtentibus ductæ ad planum ſecans perpendiculares (G E), intra figuræ ſectionem cadent.

a 18 11.
b *priùs.*
c 38. 11.
*

Per G ducatur planum axi, [a] (adeóque plano per axem) rectum; [b] ergo communis ſectio B A erit diameter circuli B G A. [c] & perpendicularis G E cadet in B A. * ergo punctum E eſt intra ſectionem B V A. Cunctis his ſubjecit *Archimedes:* Horum omnium perſpicuæ ſunt demonſtrationes. Ita viſum illi ὀξυδερκεῖ. Nos tamen lucem iis qualemcunque conati ſumus accommodare; non nemo certè ſpiſſas tenebras offudit. (Cui placet immani tædio vexari, *Rivaltum* adeat in hæc commentantem, ipſiúſque deſiderio, ni fallor, abundè ſatisfiet).

Prop. XIII.

Fig. 133.

Si conoides parabolicum plano ſecetur, neque per axem (V K) nec æquidiſtanter axi, ſectio (D L E) erit ellipſis. Diameter autem ejus major erit recta (D E) intercepta in conoide à facta ſectione planorum & ejus quod figuram ſecat, & ejus quod per axem tranſit rectum ſecanti plano: minor autem diameter æqualis erit diſtantiæ (D F) ductarum à majoris diametri terminis axi parallelarum (D Q, E F).

a *hyp.* & 4 *def.* 11.
b 35. *1 Apol.*
c 2. 6.
d 7. 5.
e 4. & 22. 6.
f 16. 3. *Apol.*
g 11. 5.
h 21. *1 Apol.*

Capiatur enim in ſectione punctum quodvis L, à quo ducatur L H ipſi D E, [a] adeóque plano V D E, perpendicularis. & per H ducatur B A axi perpendicularis. Rectæ porro T S ad D E, & V N ad B A parallelæ tangant ſectionem D V E, & ducatur T P ad V K perpendicularis. Eſtque ob V S [b] = P V, [c] etiam N S = N T. [d] ergo N Sq. N Vq [e] (hoc eſt :: D Eq. D Fq) N Tq. N Vq [f] :: D H × H E. B H × H A (hôc eſt) :: D H × H E. H Lq [g] :: D Eq. D Fq. ergo ſectio D L E habet proprietatem ellipſis, cujus axes D E, D F. *Q. E. D.*

Prop.

Coroll. QH (æqualis dimidiæ diſtantiæ) eſt ſemiaxis minor.

Prop. XIV.

Si conoides hyperbolicum ſecetur plano (D E L) *coincidenti omnibus lateribus coni conoides complectentis, non ad rectos axi* (V K) *ſectio erit ellipſis, ejus autem major diameter erit illa* (D E) *quæ intercipitur à conoide à facta ſectione planorum & ejus quod ſecat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum ſecanti plano.* Fig. 134.

Nam eâdem factâ præparatione, qualis in præcedenti, monſtrabitur fore ſemper D H × H E. H Lq :: N Tq. N Vq. [a]unde ſectio erit ellipſis, & diameter ejus D E, major quidem alterâ, quia P V [b]$\sqsubset$ V S; [c]adeóque T N $\sqsubset$ N S [d]$\sqsubset$ N V.

[a] conv. 21. 1 Apol.
[b] cor. 36. 1 Ap.
[c] 2.6. & 14.5.
[d] 19. 1.

Coroll. Si fiat T N, N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XV.

Si oblongum ſphæroides ſecetur plano (D E L) *non recto ad axem* (V X), *ſectio erit ellipſis. Diameter autem ipſius major erit illa* (D E) *quæ intercipitur in ſphæroide à facta planorum ſectione, ejuſque quod ſecat figuram, & illius quod per axem ducitur ſecanti plano rectum.* Fig. 135.

Quòd ſectio ſit ellipſis, cujus diameter D E non ſecus quàm in præcedentibus facilè apparet. Quòd verò D E ſit major è diametris, hinc (admiſſis quæ prius) patet, Per centrum C ducantur *b a* axi V X perpendicularis, & *d e* ad B A parallela. Et quoniam quadrata ex *d e*, *b a* [a]ſe habent, ut N Tq ad V Nq, hoc eſt ut D Eq ad quadratum alterius diametri, & ſit *d e* major quàm *b a*, erit D E major altera diametro. *Q. E. D.*

[a] 16. 3. Apoll.

Coroll. I.

Siquidem prolatum ſphæroides plano ſecetur; alia quidem eadem erunt, ſed intercepta in ſphæroide linea (qualis D E) minor erit diameter.

II.

Ex iiſdem quoque patet in omnibus figuris, quòd ſi parallelis planis ſecentur ipſarum ſectiones ſimiles erunt.

Nam quadrata è perpendicularibus L H ad comprehenſa ſub ſegmentis D H, H E rectangula ſemper eaſdem obtinebunt rationes, æquales ſcilicet ei, quam habent V Nq ad N Tq.

Coroll. III.

Si fiat T N. N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XVI.

Fig. 136.

In conoide parabolico à quibuſcunque punctis (D) *in ſuperficie conoidis ductis ad axem* (V K) *parallelis* (F D E), *quæ* (B F) *in eaſdem partes ducuntur, ad quas ſunt ejus gibba, cadent extra conoides, quæ verò ad alteras* (DE) *intra.*

a 12 *hujus.*
b 26. *I Apol.*
c *hyp.*

Nam ſi per E F & axem V K ducatur planum, [a] faciet parabolam, [b] extra quam D F tota cadet, & D E intra; quia eſt F E ad V K parallela.

Prop. XVII.

Fig. 137.

In conoide hyperbolico, à quibuſcunque punctis (D) *in ejus ſuperficie, ductis rectis* (F D E) *parallelis alicui rectæ* (C G) *quæ eſt in conoide, ducta per coni conoides complectentis verticem* (C), *quæ* (D F) *ad eaſdem partes ducuntur, ad quas ſunt ipſius gibba, cadent extra conoides, quæ* (D E) *ad alteras, intra.*

a 12 *hujus. B.*
b 47. *I Apol*

Nam ſi per C G, & D E ducatur planum [a] fiet hyperbola, cujus centrum C, [b] ergo ducta C D H, & C G erunt diametri; quapropter D E his intercidens tota ad partes E intra, verſùs F verò extra ſectionem cadet.

Prop. XVIII.

Fig. 138.

Si figuras conoides tangat planum (D T) *non ſecans conoides, in uno tantùm puncto tanget; & per tactum* (D) *& axem* (V K) *ductum planum* (D V K) *rectum erit tangenti plano* (D T).

a 8 *def.* 11.
b 12 *hujus.*
c 10. *I Apol.*
d 7. 11.
e 12 *hujus.*
f *priùs.*
g 18. 3.

Si fieri poteſt, tangat planum D T etiam in Y, & per puncta D Y ducantur rectæ D E, Y Z axi parallelæ; itaque ductum per has planum aut per axem tranſit, aut [a] ei parallelum eſt; inque conoidis ſupeficie ſectionem [b] efficit coni, [c] quam recta D Y ſecat; cùm igitur D Y [d] ſit in plano D T, hoc ſecabit conoides, adverſùs hypotheſin.

Porro ducatur D N axi perdendicularis; [e] hæc diameter erit circuli ad planum D V K recti, cujus cum tangenti plano communis ſectio ſit recta D T; hæc igitur circulum tanget ([f] nec enim ſecat) [g] unde de D T ad D N perpendicularis erit, & proinde [h]recta plano D V K. ergo planum quodque per D T, adeóque planum tangens [k]rectum erit plano D V K. *Q.E.D.*

h 4 *def.* 11.
k 18. 11.

Coroll. Quævis in plano tangenti recta conoidi occurrens tangit conoides; & quamlibet in conoidis ſuperficie factam ſectionem. Nam ſi recta conoides ipſum, aut in ejus ſuperficie factam ſectionem aliquam ſecaret, planum (contra hypotheſin) ſecaret conoides.

Prop. XIX.

Si ſphæroidon figurarum quamlibet tangat planum, figuram non ſecans, in uno ſolùm puncto tanget; quodque per tactum, & axem ducitur planum, tangenti plano rectum erit.

Prorſus eodem modo demonſtratur quo præcedens.

Prop. XX.

*Si (*conoideon aut) ſphæroideon figurarum qualibet ſecetur plano per axem* (V X) *& ſectionem contingens ducatur recta quædam* (D T), *& per tangentem erigatur planum plano ſecanti rectum, continget figuram in eodem puncto* (D), *in quo & recta* (D T) *coni ſectionem tangit.* Fig. 139.

**Ita puto ſcripſiſſe Archimedem.*

Nam ſi fieri poteſt alibi tangat dictum per D T planum, puta in G; & à G ducatur G E recta plano D V X; [a]cadet hæc in ipſam D T; [b]unde punctum E [c]erit intra coni ſectionem, contra hypotheſin.

a 38. 11.
b 38. 11.
c 12. *huj.* D.

Prop. XXI.

Si figurarum ſphæroidon aliquam duo plana parallela (R T, B S) *contingant, contactus jungens* (B A) *per ſphæroidis centrum* (C) *tranſibit.* Fig. 140.

Planum per B, & axem V X plano tangenti B S [a]rectum eſt; [b]adeóque plano A T. planum per A, & axem tangenti plano A T [b]rectum eſt; [b]ergo plana B V X, A V X aut parallela ſunt, aut coincidunt; [c]non illud, ergo hoc. Igitur communes plani B V A X cum tangentibus planis ſectiones B S, A T [d]parallelæ ſunt; & [e]tangunt ellipſim B V A X, [f]ergo recta B A per centrum tranſit. *Q.E.D.*

a 19 *huj.*
b *ſch.* 14. 11.
c 8. *def.* 11.
d 16. 11.
e *hyp* & *cor.* 18 *hujus,*
f *conv.* 27. 2 *Apol.*

Digitized by Google

Prop. XXII.

Fig. 141.

Si figurarum ſphæroidum quamcunque contingentia dicantur duo parallela plana (B S, A T) *ducatur autem per ſphæroideos centrum* (C) *planum aliquod* (D E) *tangentibus parallelum; quæ per effectam ſectionem ducuntur tactus conjungenti* (B A) *parallelæ* (D M) *extra ſphæroides cadent.*

Sumatur in ſectione punctum quodvis D, & per B A ac D ducatur planum, cujus cum parallelis planis communes ſectiones ſint rectæ S R, D E, T X. hæ igitur [a]parallelæ ſunt, & D E per centrum tranſit, quia centrum eſt tam in [b]recta B A, quàm in [c]plano per D E) & ſectio B D A E eſt [d]ellipſis (aut fortè circulus) & B S, A T hanc ſectionem [e]tangunt, adeóque B A, D E ſunt [f]diametri [g]conjugatæ. [h]ergo quæ per D ducitur ad B A parallela (D M) tangit ſectionem B D A E adeóque ſphæroides ipſum. *Q.E.D.*

a 16. 11.
b 21 *hujus.*
c *hyp.*
d 12. *hujus.* C.
e *cor.* 18. *huj.*
f *conv.* 27. 2 *Apol.*
g 47. 1 *Apol.*
h 32. 1 *Apol.*

Prop. XXIII.

Fig. 142.

Omnis figura ſphæroides (V D X E) *ſecta plano* (D E) *per centrum* (C) *bipertitur à plano, cùm ipſa, tum ſuperficies ejus.*

Operam ludat, opinor, qui rei tam claræ lucem conetur addere. Sanè ſi (ducto per axem V X plano ad planum D E recto) ſemi-ellipſes D V E, D X E ſimiles ſint & æquales, quidni eodem modo portiones ſphæroides D V E, D X E æquentur & aſſimilentur penitus? ſibi congruent utique: plura tædet.

Prop. XXIV.

Fig. 143.

Datâ cujuſcunque conoidis portione (B V A) *reſectâ plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) (*vel cujuſlibet ſphæroidis non majoris dimidio ſphæroide portione ſimiliter abſciſſâ*) *poſſibile eſt figuram ſolidam inſcribere, & aliam circumſcribere, è cylindris aquè altis* *compoſitam, *ita ut figura circumſcripta ſuperet inſcriptam minori quàm propoſitâ quâcunque ſolidâ magnitudine* (Z).

**lego* χᾶμα *pro* τμᾶμα.
**lego* ἐχόντων συγκείμενον, *pro* ἐχόντων τῶν συγκειμένων.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto, [a]faciente coni ſectionem B V A; & ſuper circulum B O A conſtituatur cylindrus B P Q A, habens eundem cum conoide axem V K; qui quidem

a 12 *hujus.*

dem, *æquiſecto axe in punctis N,M,L, [b]ſic dividatur ut ſit cylindrus B X X A, altitudine K L, minor dato ſolido Z. Per diviſionum verò puncta L, M, N ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, ſectioni occurrentes punctis B, A; per quæ ducantur rectæ $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$ ad V K parallelæ. Jam circa axem V K circumvolutâ figurâ $B\varkappa\lambda\mu\nu\nu\mu\lambda\varkappa A$ liquet [c]effici figuram conoidi circumſcriptam, conſtantem è cylindris $B\varkappa$, $B\lambda$, $B\mu$, $B\nu$ æquè altis (nam rectæ $\varkappa B$, λB, μB &c [d]cadunt extra conoides; & rectæ B A ſunt [a]diametri circulorum parallelorum ipſi B O A; & altiuditnes K L, L M &c [e]æquantur). Item circumductâ figurâ *l m n* B A *n m l*, patet inſcriptam eſſe conoidi figuram, itidem è cylindris æquè altis compoſitam; (nam rectæ *l* B, *m* B, *n* B intra ſectionem jacent &c) quia verò cylindrus B *l* [f]æquatur cylindro $B\lambda$, & cylindrus B *m* cylindro $B\mu$, & [f]cylindrus B *n* cylindro $B\nu$; liquet circumſcriptam excedere inſcriptam cylindro $B\varkappa$, hoc eſt minore quàm ſolido Z. *Q.E.F.*

b 1. 10. & 11 12. *

c 21. *def.* 11.

d 16, 17, 22 *b.*

e *conſt.*

f 11. 12.

Coroll. Cylindrus $B\varkappa$ eſt exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra inſcriptam.

Prop. XXV.

Datâ conoidis cujuſcunque portione (B O A) *reſectâ plano* (B O A) *non rectâ ad axem (vel ſphæroidis cujuſlibet non majoris dimidio ſphæroide ſimiliter reſectâ) poteſt ipſi figura ſolida inſcribi, aliáque circumſcribi, ita ut figura circumſcripta inſcriptam excedat minori, quàm propoſitâ quacunque magnitudine ſolidâ* (Z).

Fig. 143.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto; [a]ita ut fiat coni ſectio B V A, cujus communis cum plano B O A ſectio B R [c]erit diameter ellipſis B O A. ſectionem verò B V A [c]tangat recta R Q ad B A parallela in V; à quo [d]ducatur ſectionis diameter V K. Super ellipſe verò B O A [e]conſtituatur ſegmentum cylindricum B P Q A, habens axem K V: æquiſecetur autem V K in punctis L,M,N, ita ut ducto per L plano ad B O A parallelo, [f]ſit ſegmentum cylindricum $B\varkappa\varkappa A$ minus dato ſolido Z. Per dicta porro diviſionum puncta ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, ſectioni occurrentes punctis B,A; unde ductis per B A planis ad ipſum B O A parallelis (hoc eſt rectis plano B V A)[b]fient ellipſes, quarum diametri BA; ad quas utrinque [c]conſtituantur cylindrica ſegmenta B *l*, $B\lambda$; B *m*, $B\mu$ &c. quorum axes K L, L M, M N &c æquales inter ſe. Factum conſtat, ut in præcedente; quid plura?

a 12. *hujus.*

b 13, 14, 15 *b.*

c *ſch* 53. 2 *Ap.*

d 10. 1.

e 10. *hujus.*

f 1. 10.

His prælibatis, *demonſtremus quæ de figuris propoſita ſunt.

*(*Subjicit Archimedes*)

Digitized by Google

Hactenus nempe propoſitiones lemmaticas præſtravit, jam principales aggreditur, quibus iſtæ deſerviunt.

Prop. XXVI.

Fig. 143. *Quæcunque portio* (B V A) *conoidis parabolici reſecti plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) *ſeſquialtera eſt coni* (B V A) *baſin habentis eandem portioni, & axem.*

a 9. *ax.* 1.
b 10. 12.
c *conſt.*
d 11. 12.
e 2. 12.
f 20. *1 Apol*
g *cor.* 24 *huj.*
h 1 *huj.*

Si fieri poteſt, ſit primò port B V A $\sqsubset \frac{1}{2}$ con B V A. Portioni circumſcribatur figura (quæ vocetur φ) & inſcribatur altera (quæ dicatur ψ) utraque conſtans cylindrulis, juxta 24 hujus, ita ut $\varphi - \psi \sqsupset$ port A B C $- \frac{1}{2}$ con A B C; unde cùm [a]ſit $\varphi \sqsubset$ port A B C, erit $\psi \sqsubset \frac{1}{2}$ con A B C [b]$=$ cyl $\frac{BPQA}{2}$. Sunt autem figuræ circumſcriptæ cylindri [c](æquè ſcilicet alti) Bκ, Bλ, Bμ, Bν ad ſe ordine [d]ut ſuæ baſes, [e]hoc eſt ut quadrata radiorum B K, B L, B M, B N, [f]hoc eſt ut axes V K, V L, V M, V N, [c]hoc eſt juxta hypotheſin primæ hujus. ergo cùm cylindrus B P Q A [c]æquetur totidem æqualibus horum maximo Bκ; & figura ψ [g]ipſis his omnibus, dempto maximo Bκ; [h]erit cyl $\frac{BPQA}{2} \sqsubset \psi$. ſed prius erat $\psi \sqsubset$ cyl $\frac{BPQA}{2}$: quæ repugnant.

k 24 *hujus.*
l 9. *ax.* 1.
m 10. 12.
n 1 *hujus.*

Sin verò dicatur eſſe $\frac{1}{2}$ con B V A $\sqsubset$ port B V A; [k]ſit jam $\varphi - \psi \sqsupset \frac{1}{2}$ con B V A $-$ port B V A; adeóque cùm ſit port B V A [l]$\sqsubset \psi$, *erit $\varphi \sqsupset \frac{1}{2}$ con B V A, [m]hoc eſt $\varphi \sqsupset$ cyl $\frac{BMNA}{2}$, [n]quod eſt abſurdum.

Ergo potiùs eſt portio B V A $= \frac{1}{2}$ con B V A. *Q.E.D.*

o 11. & 2. 12.
p 20. *1 Apol.*
q 11. 12.
r 7. 5.
s 2 *hujus.*
t 1 *hujus.*

Archimedes adhibet ſecundam hujus, hoc fermè pacto. Quoniam eſt cyl $B\left|\begin{array}{l}B\kappa.\ LA\\ XS\end{array}\right.$ [o]:: (B Kq. B Lq [p]::) V K. V L. & cyl X S. *m* A [o]:: (B Kq. B Mq [p] ::) V K. V M. & ſimili modo cyl X S. *n* A :: V K. V N; & ſunt cylindri X S [q]æquales inter ſe, [r]adeóque proportionales totidem æqualibus ipſi V K, [s]ergo erit illorum ſumma (hoc eſt cylindrus B φ Q A) ad omnes *l* A, *m* A, *n* A, ut totidem V X ad V L + V M + V N; [t]hoc eſt in majori ratione quàm 2 ad 1 &c. Res eodem recidit, at noſter modus ſimplicior videtur, & clarior; qualem proinde nos in ſequentibus haud verebimur uſurpare.

Cylindri.	*Rectæ.*
XS.XS.XS.XS.	VK.VK VK.VK.
l A. *m* A. *n* A.	VL.VM.VN.

Cor. Conoidis parabolici portio dimidia eſt cylindri ad æqualem baſin & æquè alti.

Cor. 2. Hinc datâ parabolici conoidis portione rectò abſciſſâ, facilè reperitur æqualis ei conus, aut cylindrus, Fig. 144.

Si protrahatur axis K V ad D, ut ſit $DV = \frac{1}{2} KV$. erit conus B D A $= \frac{1}{2}$ con B V A $=$ port B V A.

Schol.

Indiviſibilium methodo facilè deducitur hæc propoſitio. Sit enim $VN = a$, $UK = A$; parameter r, vel R. éſtque

$$\left.\begin{array}{l} BNq = ra \\ BMq = 2ra \\ BLq = 3ra \\ BKq = RA \end{array}\right\} {}^{\alpha}\text{Summa eſt } \frac{RAA}{2} \text{ ergo ſumma circulorum } BA \text{ eſt } \frac{\pi}{\delta}\,\frac{RAA}{2}.\ {}^{*}\text{Conus } BVA \text{ eſt } \frac{\pi}{\delta}\,\frac{RAA}{3}.\ \text{ergo.}$$

α ſch. 1 huj.

* hoc eſt $\frac{BKq \times VK}{3}$

Prop. XXVII.

Quinetiam ſi plano (B O A) *non rectò ad axem à conoide parabolico reſecetur portio* (B V A)*. ſimiliter ſeſquialtera eſt ſegmenti coni* (B V A) *baſin habentis eandem cum portione, & axem eundem.* Fig. 145.

Si fieri poteſt, ſit port B O A $\sqsubset \frac{1}{2}$ ſegm B V A, portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quæ dicuntur $\varphi\ \psi$) conſtantes ſegmentis cylindricis, juxta 25 hujus, ita ſcilicet ut $\varphi - \psi \sqsupset$ port B V A $-$ ſegm B V A. unde erit $\psi \sqsubset \frac{1}{2}$ ſeg B V A. Sunt autem ſegmenta cylindrica B κ, B λ, B μ, B ν, [a] ut baſes ſuæ ellipticæ, [b] hoc eſt ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [c] hoc eſt ut axes B K, B L, B M, B N, [d] hoc eſt rurſus juxta hypotheſin primæ hujus; [e] quare ſegm $\frac{BPQA}{2} \sqsubset \psi$, [f] hoc eſt $\frac{1}{2}$ ſegmenti conici B V A $\sqsubset \psi$; quod oſtenſis repugnat. Sin dicatur port B V A $\sqsupset \frac{1}{2}$ ſegm B V A, itidem conſequetur abſurda contradictio, ſicut in præcedenti. Ergo potiùs eſt port B V A ſeſquialtera ſegmenti conici B V A. *Q. E. D.*

[a] ſch. 11 huj.
[b] cor, 7. huj.
[c] 20. 1 Apol.
[d] conſtr.
[e] 1 hujus.
[f] 11 hujus.

Hinc quoque facilè reperiatur ſegmentum conicum aut cylindricum (vel etiam conus, & cylindrus) æquale ejuſmodi portioni.

Prop. XXVIII.

Fig. 145. *Si conoidis parabolici duæ portiones* (B V A, S D G) *reſecentur planis, altera quidem* (B V A) *recto ad axem, altera verò* (S D G) *obliquo, ſint verò portionum axes* (V K, D E) *æquales; portiones erunt æquales.*

Secetur conis plano per axem ad planum SG recto, [a] faciente ſectio-
a 12 hujus. A. nes BVA, SDG; quarum diametri VK, DE; connectantur autem V B,
b hyp. c cor. 4. hujus. VA, & DS, DE; & ducantur GL ad DE (protractum) & D P ad S G
d 7. 5. perpendicularis. & propter DE [b]= VK, [c] eſt G L = AK. [d]unde GE.
e 4. 6. G L) ([e]hoc eſt D E, D P, [d] vel V K, D P) :: G E. A K [f]:: G E ×
f 1. 6. A K. A Kq. [g] Sunt verò G E, & G L, vel A K ſemiaxes ellipſis, quæ
g 13 hujus. h 6 hujus. baſis eſt portionis S D G; [h]adeóque G E × A K ad A Kq, ut hæc el-
k 11. 5. lipſis ad circulum radio A K. ergo ut altitudo V K ad altitudinem
l ſch. 11 huj. D P, [k]ita eſt reciprocè baſis ſegmenti conici S D G ad conum B V A.
m 26 & 27 h. [l]ergo conus B V A ſegmento conico S D G æquatur, [m] & ideo portio
& 15. 5. B V A portioni S D G. *Q.E.D.*

Proop. XXIX.

Fig. 146. *Si conoidis Parabolici duæ portiones reſecentur planis, quomodocunque ductis, portiones ad ſe mutuò rationem habebunt eandem, quàm quadrata axium ſuorum.*

Per axem conoidis ducatur planum, quod efficiat ſectionem; in
a 28 hujus. cujus axe ſumanrur à vertice rectæ V K, V Z datarum portionum
b 15. 5. & 26 axibus æquales, & ducantur B A, X Y ad V K perpendiculares: [a]ſunt
27 hujus. igitur portiones B V A, X V Y æquales datis; hæ verò ſe habent
c ſchol 15. 12. invicem [b]ut coni B V A, X V Y, [c]hoc eſt in compoſita ratione baſi-
d 2. 12. e 21. 1 Apol. um & altitudinum, hoc eſt in ratione compoſita ex rationibus [d] B Kq
f 23. 6. ad X Zq, & V K ad V Z; [e]hoc eſt compoſita ex rationibus V K ad
g conſt. & 7. 5. V Z, & VK ad VZ; hoc eſt, [f] ut V Kq ad V Z q, [g] hoc eſt ut quadrata axium datarum portionum. *Q.E.D.*

Prop. XXX.

Fig. 147. *Omnis hyperbolici conoidis portio* (B Y A) *reſecta plano* (B O A) *recto ad axem, ad conum* (B V A) *habentem baſim eandem cum portione, & æqualem altitudinem, hanc habet rationem, quam habet æqualis* (K Y) *& axi* (V K) *portionis, & tripla* (V Y) *axi accedentis*

(V C)

Digitized by Google

(V C) *ad æqualem* (X T) *utrique & axi portionis, & duplæ* (V T) *accedentis axi.*

Sit aliquod Z. con B V A :: K Y. K T ; & ſi fieri poteſt ſit pri- a 24 *hujus.*
mò Z $\sqsupset$ port B V A. [a]Portioni circumſcribantur & inſcribantur
figuræ (quæ dicantur φ, & ψ) utraque conſtans cylindris, juxta 24
hujus, ita ut ſit φ — ψ $\sqsupset$ port B V A — Z ; *adeóque Z $\sqsupset$ ψ ; ſunt
autem cylindri B κ, B λ, B μ, B ν ad ſe, [b]ut baſes, [c]hoc eſt ut B Kq, b 11. 12.
B Lq, B Mq, B Nq, [d] hoc eſt ut rectangula T K V, T L V, T M V, c 2. 12.
T N V, ([e]hoc eſt ut T V + V K × V K ; T V + V L × V L, T V d 21. *1 Apol.*
+ V M × V M, T V + V N × V N) [f] hoc eſt juxta hypotheſin ter- e 1. 6.
tiæ hujus ; ergo [g]cylindrus B Q (æqualis ſummæ maximorum B κ) f *conſt.*
ad figuram inſcriptam ψ (æqualem ſummæ inæqualium cylindrorum g 2 *hujus.*
dempto maximo) ſe habet, ut rectangula totidem æqualia maximo
T K V ad inæqualia rectangula T L V, T M V, T N V, [h]hoc eſt in h 3 *hujus.*
majore ratione quàm K T ad $\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T, hoc eſt in majore ra- k 15. 5.
tione quàm cylindrus B Q ad Z (nam eſt $\frac{KT}{3}$. $\frac{KV}{3}$ + V C [k] :: (KT. l *conſt.*
K V + 3 V C [l] :: K T. K Y [m] :: con B V A. Z [n] ::) cyl $\frac{BQ}{3}$. Z ; [o] a- m *conſt. & cor.* 4. 5.
deóque K T. $\frac{KV}{3}$ + V C :: cyl B Q. Z) [p] ergo ψ $\sqsupset$ Z ; quod re- n 10. 12.
pugnat priùs oſtenſis. Sin dicatur Z $\sqsubset$ port B V A ; [q]fiat φ — ψ * o
$\sqsupset$ Z — port B V A, *adeóque φ $\sqsupset$ Z ; & quia cyl B Q. φ [r] $\sqsupset$ KT. p 10. 5.
$\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T [s] :: cyl B Q. Z ; [t]erit φ $\sqsubset$ Z quod itidem repug- q 24 *hujus.*
nat. ergo potiùs eſt Z = port B V A. *Q.E.D.* r 3 *hujus.* s *priùs.* t 10. 5.

Schol.

Hinc facilè reperitur conus æqualis datæ hyperbolici conoidis portioni (B V A).

Fiat K V + 2 V C. K V + 3 V C :: K V. K D. Eſtque con BDA. Fig. 148.
con B V A :: K D. K V :: K V + 3 V C. K V + 2 V C :: port
B V A. con B V A. unde con B D A = port B V A.

Schol.

Indiviſibilium methodo faciliùs tranſigitur hoc negotium.

Sint V N $= a$. V K $=$ A. eſt

α 12. 1 Apoll.

$$BNq^{\alpha} = ra + \frac{r}{t}aa$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra + \frac{r}{t}4aa$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra + \frac{r}{t}9aa$$

$$BKq^{\alpha} = RA + \frac{R}{T}Aq.$$

β ſchol. 1 huj.
γ ſch. 10. de helic.
Summa $^{\beta}\frac{RAA}{2} + {}^{\gamma}\frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$

*hoc eſt $\frac{\pi}{\delta}$
×: B Kq×VK.
δ 10. 12.
ζ 15. 5.

Ergo ſumma circulorum B A, eſt $\frac{\pi}{\delta} \times : \frac{RAA}{2} + \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At conus B V A $^{\delta}$eſt $^{*}\frac{\pi}{\delta} \times : \frac{RAA}{3} + \frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. Horum verò $^{\zeta}$eadem eſt ratio quæ $\frac{3T}{2} +$ A ad T $+$ A (quod patet iſtas ſummas multiplicando per 3 T & dividendo per RAA). Et hoc, opinor, modo *Archimedes* hanc proportionem adinvenit.

Prop. XXXI.

Quinimò ſi non recto ad axem plano reſecetur portio hyperbolici conoidis, ad ſegmentum coni, baſin habentis eandem cum portione, eundèmque axem hanc habebit rationem, quam æqualis utrique, axi nempe portionis cum tripla accedentis axi, ad æqualem ambabus, axi nempe & duplæ accedentis axi.

Probatur ut antecedens, niſi quòd pro circulis hîc ellipſes habeantur. Confer Propoſ. 27.

Prop. XXXII.

Fig. 149. *Omnis figuræ ſphæroideos plano reſectæ per centrum* (K) *recto ad axem* (V T) *dimidium* (B V A) *duplum eſt coni* B V A) *baſin habentis eandem cum portione, & eundem axem.*

a 24 hujus.
b ut in priorib.

Si fieri poteſt ſit 2 con B V A $\sqsupset$ port B V A; portioni ^{a}circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quas pro more voco φ & ψ) ita ut ſit $\varphi - \psi \sqsupset$ port B V A $-$ 2 con B V A; ^{b}ac ideo 2 con B V A $\sqsupset \psi$.

Sunt autem cylindri $B\kappa$, $B\lambda$, $B\mu$, $B\nu$ ad ſe [c]ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [d]hoc eſt ut rectangula T K V, T L V, T M V, T N V, [e]hoc eſt ut V Kq, V Kq—KLq, V Kq—K Nq, V Kq—K Nq; ergo cylindrus BQ [b](æqualis ſummæ cylindricorum æqualium maximo $B\kappa$) ad figuram ⸸ [b](æqualem ſummæ inæqualium dempto maximo) [c]ſe habet ut totidem V Kq, ad reliqua V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq—V Nq, [g]hoc eſt in majori ratione quam tot V Kq ad V K q, VKq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq—V Nq, [g] hoc eſt in majori ratione quàm tot V Kq ad tot V Kq—$\frac{1}{3}$ V Kq (quia $\frac{\text{tot V Kq}}{3}$ [h] $\sqsubset$ V Lq + V Mq + V Nq) hoc eſt quàm tot V Kq ad tot $\frac{2}{3}$ V Kq, hoc eſt quàm 3 ad 2, [k]hoc eſt quàm cylindrus B Q ad duplum coni B V A. [l]unde fig ⸸ $\sqsupset$ 2 con B V A. verùm erat 2 con B V A $\sqsupset$ ⸸, quæ repugnant.

c 11. 12.
d 21. *I Apol.*
e 5. 2.
f 2 *hujus.*
g 8. 10.
h 2 *cor.* 10 *de helic.*
k 10. 12.
l 10. 5.

Quòd ſi dicatur 2 con B V A $\sqsubset$ por B V A; [m]fiat φ—⸸ $\sqsupset$ 2 con B V A—port B V A; adeóque $\varphi \sqsupset$ 2 con B V A. verùm contra, priorem diſcurſum invertendo, [n]patet eſſe 2 con B V A ad cylindrum B Q in minori ratione quàm V Kq, V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq—V Nq ad tot VKq, [o]hoc eſt quàm figura φ ad cylindrum BQ, [p]adeóque eſſe 2 con B V A $\sqsupset \varphi$, quod repugnat. Quin potiùs ergo eſt port B V A = 2 con B V A. *Q.E.D.*

m 24 *hujus.*
n 26. 5.
o *priùs,* & 2 *b.*
p 10. 5.

Per indiviſibilia: ſit V N = *a*, V K = A.

$$BNq^{\alpha} = ra - \frac{r}{t}aa.$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra - \frac{r}{t}4aa.$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra - \frac{r}{t}9aa.$$

$$BKq^{\alpha} = RA - \frac{R}{T}AA.$$

α 13. *I Apol.*

[β]Summa eſt $\frac{RAA}{2}$ [γ]$\frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. & ſumma circulorum B A eſt $\frac{\varpi}{\delta}: \frac{RAA}{2} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At verò conus B V A [δ]eſt $\frac{\varpi}{\delta}: \frac{RAA}{3} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$ [δ](quia B Kq [ζ]$= RA + \frac{R}{T}AA$). ergo cùm iſta ſumma[θ] ſit ad hanc ut $\frac{3}{2}F$ — A ad T—A (ut patet utramque ducendo in T, & dividendo per [illegible] -RAA)

β 1 *hujus.*
γ *ſch.* 10. *helic.*
δ 10. 11.
ζ 13. 1 *Apol.*
θ 15. 5.

Digitized by Google

λ hyp. μ 11. 5. RAA) hoc eſt in præſente caſu ut 2 ad 1) λ quia $\frac{T}{2} = A$) μ erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

Prop. XXXIII.

Quinetiam ſi ſphæroides plano non recto ad axem per centrum ſecetur, ſimiliter dimidium ſphæroidis duplum erit ſegmenti coni baſin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonſtratio ab illa præcedentis: confer propoſ. 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149. *Omnis figura ſphæroidis* (B V A T) *plano ſectæ recto ad axem* (VT) *non per centrum* (C) *portio minor ad conum* (B V A) *baſin habenti eandem cum portione, & axem eundem* (V K) *hanc habet rationem, quàm utraque* (V C + K T) *& ſemiſſis axis ſphæroidis, & axis majoris portionis ad axem* (T K) *majoris portionis.*

Vides in præcedente ſecundùm indiviſibilia proceſſu, qui generalis eſt, & ad quaſlibet portiones (etiam hemiſphæroide majores) æquè ſpectat, eſſe portionem B V A ad conum B V A, ut $\frac{3T}{2} - A$ ad T-A, hoc eſt ut V C + K T ad K T. *Q.E.D.*

Sin *Archimedis* ſtrictiorem diſcurſum aves cognoſcere; ſit aliquod Z. con B V A :: V C + K T. K T. & ſi fieri poteſt, ſit primò port B V A ⊏ Z. Portioni verò B V A [d]rurſus circumſcribantur figuræ φ,
d 24 hujus. Ψ, ita ut φ — Ψ ⊐ port B V A — Z; ac [b]inde Z ⊐ ψ. Sunt verò cylin-
e ut in præced. dri Bκ, Bλ, Bμ, Bν ad ſe [e]ut rectangula BKV, B L V, B M V,
f 2 hujus. B N V; adeóque cylindrus B Q ad inſcriptam figuram Ψ, [f]ut tot rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

Eſt verò
$$\left\{\begin{array}{l} TK \times KV^{*} = TL \times LV + 2CK \times KL + KLq. \\ TK \times KV^{*} = TM \times MV + 2CK \times KM + KMq. \\ TK \times KV^{*} = TN \times NV + 2CK \times KN + KNq. \\ TK \times KV^{*} = TK \times KV = 2CK \times KV + KVq. \end{array}\right.$$

g 5. 2. *Nam exceſſus rectangulorum T K V, T L V [g]eſt C Lq — CKq [h]=
h 4. 2. C Kq + 2 C K × K L + KLq — CKq = 2 CK + KL + KLq &c.

Se verò habet ſumma juxta 3^{am} hujus;

$$\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq. \\ 2CK \times KM + KMq \\ 2CK \times KN + KNq. \\ 2CK \times KV + KVq. \end{array}\right\}$$

[k]adeóq; tot æqualia maximo $2CK \times KV$ k 3 *hujus.*
$+ KVq$ ad omnia inæqualia ſe habent
in minori ratione, quàm $2CK + KV$ ad
$CK + \frac{1}{3}KV$, hoc eſt quàm KT ad $CK + \frac{1}{3}KV$. [l]ergo per converſionem l 26. 5.
rationis tot æqualia maximo ſunt ad ſeipſa demptis his inæqualibus
(hoc eſt omnia rectangula TKV ad ipſa TLV, TMV,
TNV) in majori ratione, quàm KT ad KT dempto $CK +$
$\frac{KV}{3}$; hoc eſt quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$. [m]ergo cyl $BQ.\Psi \sqsubset KT.CV -$ m 10. 5.
$\frac{KV}{3}$. Eſt verò cyl $BQ.Z$ [n]:: 3 con $BVA.Z$ [o]:: $3KT.VC + KT$ n 10. 12. o *hyp.*
:: $KT.VC + \frac{KV}{3}$ (nam $VC + KT = 3VC - VK$). [m]ergo Ψ
$\sqsupset Z$, contrà quàm priùs evictum eſt.

Quòd ſi dicatur eſſe $Z \sqsubset$ port BVA, fiat $\varphi - \Psi$ [p]$\sqsupset Z -$ port p 24 *hujus.*
BVA, ac ideo $\varphi \sqsupset Z$. Jam (oſtenſis inſiſtendo) eſt cyl BQ ad figuram
circumſcriptam φ, [q]ut tot rectangula TKV (quot ſunt cylindri q *ut in præc.*
B✱ in BQ) ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV. verùm
tot rectangula TKV([r]hoc eſt tot $2CK \times KV + KVq$) ad ſummam r *priùs.*

$$\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq \\ 2CK \times KM + KMq \\ 2CK \times KN + KNq \end{array}\right\}$$

[s]ſe habent in majori ratione quàm $2CK$ s 3 *hujus.*
$+ KV$ ([r]vel KT) ad $CK + \frac{1}{3}KV$. &
ideo dicta rectangula TKV ad ſeipſa demptà
hac ſummâ ([r]hoc eſt ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV)
[t]in minori ratione erunt quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$, [r]hoc eſt quàm cyl t 26. 5.
BQ ad Z. [u]quare cyl $BQ.\varphi \sqsupset$ cyl $BQ.Z$. quare $\varphi \sqsubset Z$. quod u 10. 5.
iterum repugnat. ergo potiùs eſt $Z =$ port BVA. *Q.E.D.*

Prop. XXXV.

Quinetiam ſi ſphæroides plano non recto ad axem ſecetur, neque per centrum, minor ejus portio ad ſegmentum coni baſin habentis eandem cum portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam ſimul utraque & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, & axis majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rurſus eſt port BVA ad conum BVA, ut $VC + KT$ ad KT. Simili modo demonſtratur, ut præcedens, adhibendo ellipſes pro circulis, ut in 27 hujus; quare tædio parcimus.

Prop. XXXVI.

Fig. 151. *Cujuſcunque ſiguræ ſphæroideos* (B V A T) *plano ſectæ recto ad axem major portio* (B T A) *ad conum* (B T A) *habentem eandem cum portione baſin, & eundem axem* (T K), *hanc habet rationem, quam æqualis* (G K) *ambabus ſimul & dimidio* (C V) *axis ſphæroidis, & minoris portionis axi* (K V) *habet ad axem* (K V) *minoris portionis*

Agatur planum D E per centrum ; & compleantur coni B V A,
D V E: Sint verò T F = T C ; & V K. V C :: V C. V X. Eſtque
a *ſch* 12. jam con D V E con B V A.[a] = (V C. V K + D Cq. B Kq = V C.
b 21. *1 A. ol.* V K +[b] V Cq. T K × K V[c] = V X. V C + V Cq. T K × K V[c] =
c *conſt.* V X × V C . V Cq + V Cq. T K × K V[c] =) V X × V C. T K ×
d 1. 6. K V. item con B V A. port B V A[f] :: T K. K F[d] :: T K × K V. K F ×
e 20. *def.* 5. K V. ergò ex æquo eſt con D V E. port B V A :: V X × V C . K F
f 34 *huj.* × K V. & antecedentes quadruplando [g]ſphærois D V E. port B V A
g 32 *hujus.* ::[h] V X × G F. K F × K V. & dividendo port B T A. port B V A ::
h *conſtr.* & 1. 6. V X × G F — K F × K V. K F × K V (hoc [k]eſt) :: V X × G K + K X
k 7. 5. × K F. K F × K V. (nam eſt V X × G F[d] = V X × G K + V X ×
l 1. 2. K F = V X × G K +[l] K V × K F + K X × K F; adeóque V X ×
G F — K F × K V = V X × G X + K X × K F). Item eſt port B V A.
con B V A[f] :: F K. T K.[l] :: K F × K V . T K × K V; & con B V A.
m 11. 12. con B T A[m] :: K V. T K :: T K × K V. T Kq. ergo rurſus ex æquo
n *conſt.* eſt port B T A. con B T A :: V X × G K + K X × K F. T Kq. Quo-
o 19. 5. niam verò eſt V X. V C[n] :: V C . V K ::[o] V X — V C. V C — V K
(hoc eſt) :: C X. K C. & componendo V C + V K. V K :: K X.
K C; hoc eſt G K. V K ([l]vel V X × G K. V X × V K) :: K X. K C
p 12. 5. ([l]vel K X × K F. K C × K F). & [p]proinde G K. V K :: V X × G K +
q 17. 6. K X × K F. V X × V K + K C × K F. eſt verò demùm V X × V K +
r *cor.* 5. 2. K C × K F[q] = V Cq + K C × K F = V Cq + : T K — V C × : T K
s 7. 5. + V C[r] = V Cq + : T Kq — V Cq = T Kq. [s]ergo G K. V K ::
t *priùs.* (V X × G K + K X × K F. T Kq[t] ::) port B T A. con B V A.
Q.E D.

Hujuſce diſcurſûs tædium qui voluerit declinare, per generalem propoſ. 34æ diſcurſum ſibi patiatur ſatisfieri.

Prop. XXVII.

Quinetiam ſi ſphæroides (B V A T) *ſecetur plano non recto ad axem, neque per centrum, major ejus portio* (B I A) *ad ſegmentum coni baſin habentis eandem cum portione, & eundem axem, hanc habebit rationem, quam utraque ſimul* (K G) *æqualis nempe dimidiæ* (C V) *vertices connectentis factarum portionum, & axi* (K V) *minoris portionis, ad axem minoris portionis.*

Eodem ferè modo demonſtratur quo antecedens, pauculis, quæ res ipſa ſponte ſuggeret, immutatis.

Coroll.

Ex his facilè reperiatur conus cuilibet datæ ſphæroidis portioni (B V A) æqualis. Fig. 152.

Fiat nempe K T. V C + K T :: K V. K D. & compleantur coni B V A. B D A; éſtque con B V A. con B D A [a]:: K V. K D [b]:: K T. V C + K T [c]:: con B V A. port B V A. [d]ergo con B D A = port B V A. *Q. E. F.*

a 11. 12.
b *conſt.*
c 34. 35, 36, 37 *hujus.*
d 9. 5.

His ſubjiciemus ea, quæ è dictis conſectari ſubinnuit *Archimedes* in præloquio ad hunc librum ſuo.

Prop. XXXVIII,

Similes ſphæroideon & conoideon portiones (B V A, D X F) *triplicatam inter ſe rationem habent axium ſuorum* (V K, X L). Fig. 153. Fig. 154.

Sint C, E centra figurarum, & T, S axium extrema; & [a] quia eſt K B. K V :: L D. L X; [b] liquet conos B V A, D X F eſſe ſimiles, [c]adeóque triplicatam habere rationem diametrorum, vel axium V K, X L, (unde ſtatim patet portiones B V A, D X F, ſi parabolicæ fuerint, habere quoque triplicatam eorundem axium rationem; in reliquis autem) ob figurarum ſimilitudinem [e]ipſarum latera proportionalia ſunt, [f]hoc eſt T K × K V. K Bq :: S L × L X. L Dq. ergo ex æquo eſt T K × K V. K Vq :: S L × L X. L Xq. [g] hoc eſt T K. V K :: S L. L X. & per converſionem rationis T K. T V :: S L. S X. adeóque T K. C V [*] :: S L. E X. & componendo T K. T K + C V :: S L. S L + E X [k]hoc eſt con B V A. port B V A :: con D X F. port D X F. ergo permutando con B V A. con D X F :: port B V A. port B X F.

a *hyp.* & 9 *def. hujus.*
b 24. *def.* 11.
c 12. 12
d 26, 27 *hujus,* & 15. 5.
e *hyp.* & 5. 8. *hujus.*
f 21. 1 *Apoll.*
g 1. 6. & 11. 5.
k 30, 31, 32, 33. 34, 35, 36, 37 *hujus.*

l 11. 5.

B X F. [l]ergo portiones B V A, D X F triplicatam quoque rationem habent axium V K, S L. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc ſimiles integræ figuræ ſphæroides triplicatam axium rationem habent.

Nam ex hoc generali diſcurſu ipſarum dimidiæ portiones ita ſe habent.

Prop. XXXIX.

Fig. 155.
Fig. 156.

In ſphæroidibus figuris æqualibus (B V A T, D X F S) *quadrata è diametris* (B A, D F) *proportione reciprocantur axibus; &, ſi quadrata diametrorum reciprocentur axibus, æqualia ſunt ſphæroidea.*

a 32. *hujus.*
b 15. 12.
c 15. 5.

Si ſphæroides æquales ponantur, erunt ipſarum [a]ſubquadrupli coni B V A, D X F æquales; [b]adeóque erit B A q. D F q :: E X. C V [c]:: S X. T V. *Q.E.D.*

Sin ponatur eſſe S T. T V ([c]hoc eſt E X. C V) :: B Aq. DFq. [b]erunt ideo coni B V A, D X F pares; ac adeò horum [d]quadruplæ ſphæroides æquabuntur. *Q.E.D.*

Prop. XL.

Fig. 157.
Fig. 158.

A data ſphæroidis aut conoidis portione (B V A) *portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono* (Z X Y).

Not. XP eſt altitudo coni, & Z Y diameter baſis, Z P radius.
a 26 *hujus.*
b 7. 5.
c *conſt.* & *
d 1. 6.
e *conſt.* & 7. 6.
f 11. *I Apol.*
g 11. 5.
l *ſch. ad fin. ult.* 2 *Apoll.*
k 28 *hujus.*

1. In parabolico conoide ſit V K axis, & ſectionis per axem parameter R; fiat verò 3 R. Z P :: Z P. G. & inter X P ac G reperiatur media proportionalis, cui æquetur V K; & per K ducatur planum B A axi rectum, erit portio B V A æqualis dato cono. Nam fiat K Q = $\frac{1}{2}$ V K. [a]ergo conus B Q A æquatur portioni B V A. Eſt verò Q K. X P [b]:: $\frac{1}{2}$ V K. X P [c]$\frac{1}{2}$ G. V K [d]:: $\frac{1}{2}$ R G. R × V K [e]:: Z Pq R × V K [f]:: Z Pq. B Kq. [g]:: Q K. X P. ergo conus B Q A æquatur cono Z X Y. adeóque portio B V A cono Z X Y æquatur. Itaque ſi dato plano parallela ducatur D N tangens ſectionem B V A in D; & ducatur diameter D E = V K; & per E ducatur planum S G ad D N parallelum; [k]liquet abſolvi propoſitum.

2. In ſphæroide, & conoide hyperbolico problema ſolidum eſt, cujus analyſin ſubjungam. V T eſt axis. B A ad V T perpendicularis.

Analyſis.

Analyſis.

In ſphæroide ſit $VT = t$. parameter $VR = r$. $XP = m$. $ZP = n$. conus $BQA =$ port BVA. $KV = a$. unde $BKq = ra - \frac{r}{t}aa$. $KV . KQ :: t - a . \frac{1}{2}t - a :: a . \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} = KQ$.
$XP . QK :: BKq . ZPq$ (ob con $BQA =$ con ZXY) $m . \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} :: \frac{rta - raa}{t} . nn$. ergo fit æquatio $2ra^4 - 5tra^3 + 3ttraa + 2tmnna - 2ttmnn = 0$. Ponatur $r = n$. erit $a^4 - \frac{1}{2}ta^3 + \frac{1}{2}ttaa + tmna - ttmn = 0$. Iſta veró æquatio dividitur per $a - t$, & fit $a^3 - \frac{1}{2}taa + tmn = 0$. vel $tmn = \frac{1}{2}taa - a^3$.

Ob portionem BVA = con BQA.

Ejuſmodi veró Problemata generalibus ex methodis optimè conficiuntur.

Addenda

Addenda locis infrà citatis.

[*Poſt Prop. IV.*] *Schol.*

ARchimedeæ doctrinæ complendæ ſubjiciemus antecedenti ſuppar circa reliquas ſectiones conicas theorema.

Fig. 160. Fig. 161. *Si ab eadem hyperbola, vel ellipſe quomodocunque reſecentur duæ portiones* (B V A, S D G), *quarum à verticibus ad baſes interceptæ diametri* (V K, D E) *ſemidiametris* (C V, C D) *proportionales ſint, tam ipſæ portiones, quàm iis inſcripta triangula æquabuntur.*

Sit primùm altera diameter V K ſectionis axis; & ſint C F, C H ſemidiametri ipſis C V, C D conjugatæ; ſectionem verò tangant rectæ (per vertices V, D ductâ) V M, D N concurrentes in M; & per V ducatur L I K tangenti D N (ac ipſis proinde C H, E S) perpendicularis. Demùm ducantur D P ad M V, & M Y ad V K parallelæ. Et quia rectangula triangula M Y D, V M X ſimilia ſunt; eſt
a cor. 16. 3. Apol. Y M. V X (VP. V X) :: D M. M V [a]:: C H. C F. verùm ratio
V P ad V X componitur è rationibus V P ad V N, & V N ad V X,
b cor. 36. 1 Apol. & 2. 6 elem. [b]hoc eſt è rationibus C V ad C N, & C N ad X L; è quibus iiſdem componitur ratio C V ad X L. ergo eſt C H. C F :: C V. X L. atqui per hypotheſin eſt C V. V K :: C D. D E (hoc eſt) :: L X. X I; permutandóque C V. L X :: V K. X I. [c]ergo C H. C F :: V K. X I;
c coroll. infr. hoc eſt E S. K B :: V K. X I; unde patet inſcripta triangula B V A, S D G æquari; ſed & hinc ipſas portiones conſtabit è ſequenti theoremate: unde colligetur (prorſus eodem modo ſicut in hac *Prop.* 4.) univerſim præſtitutâ conditione præditas portiones ſibimet æquari.

Fig. 162. 163. Sint duæ quælibet portiones ellipticæ vel hyperbolicæ B V A, S D G. quarum interceptæ diametri V K, D E ſemidiametris V T, D O proportionales ſint, & altitudines (V K, X L) baſibus (B A, S G) reciprocè proportionentur (V K. X L :: S G. B A): iſtæ portiones æquales erunt.

Diametri V K, D E ſimiliter utcunque dividantur in punctis Y, P; per quæ ducantur rectæ Z φ baſi B A; & rectæ Q R baſi S G parallelæ: item per puncta Z, φ ducantur rectæ Z H, φ F ad diametrum

trum VT; & QI, RK ad diametrum DE parallelæ. Et quia CV.
VK[a] :: CD. DE. [b]erit CV. CK :: CD. CE. & ideo CVq. a *hyp.*
CVq—CKq :: CDq. CDq—CEq. [c]hoc eſt CVq. TK × KV b *cor.* 19.5.
:: CDq. OE × ED. Item ſimili ratione, quia CV. VK[a] :: CD. c 5.2.
DE. & VK. VY[d] :: DE. DP; adeóque ex æquo CV. VY :: d *conſt.*
CD. DP; erit CVq. TY × YV :: CDq. OP × PD; & permutando TY × YV. OP × PD :: CVq. CDq :: TK × KV. OE
× ED. Et rurſus permutando TK × KV. TY × YV :: OE × ED.
OP × PD; [e]hoc eſt BAq. Zφq :: SGq. QRq; & BA. Zφ :: e 21. 1 *Apol.*
SG. QR; adeóque permutando BA. SG :: Zφ. QR. Cùm igitur ſit BA. SG[a] :: XL. VK; [f]erit Zφ. QR :: XL. VK. Eſt verò XL, NL[g] :: DE. PE[d] :: VK. YK; & permutando XL. VK f 11. 5. g 2. 6. h 16. 6.
:: NL. YK, [f]ergo Zφ. QR :: NL. YK. [h]unde parallelogramma
ZHFφ, QIKR æquantur: quod cùm omnibus ejuſmodi parallelogrammis (utrique portioni inſcriptis aut circumſcriptis) conveniat,
ſatis perſpicuum eſt ipſas portiones BVA, SDG æquari.

Hanc propoſitionem *Vinc. Viviani* primus, opinor, detexit, nec ideo laude ſuâ fraudandus: hæc autem demonſtratio de penu noſtro. *in fig. præced.*

Coroll. | BA. SG | :: CF. CH :: Zφ. QR.
| BA. SG | :: VM. DM.

[*Ad Prop. XXXIII.*]

Schol.

Si conoidis hyperbolici duæ portiones (BVA, SDG) *reſecentur, quarum axes* (VK, DE) *accedentibus axi* (CV, CD) *proportionales ſint, ipſæ portiones æquales erunt.* Fig. 164.

Sit primùm axium alter VK baſi rectus; ſecetur autem conois a 12 *hujus* A.
plano per axem ad planum SG recto faciente hyperbolen, in qua
portiones BVA, SDG, quarum diametri VK. DE. tangant verò
ſectionem rectæ VM, DM; & ſit DP ad SG perpendicularis. Et b *hyp.*
quoniam eſt CV. VK[b] :: CD. DE. [c]erit DM. MV :: GS. AB. c *cor. ſch.* 4 *h.*
[d]ergo AB eſt alter axis ellipſis, quæ baſis eſt portionis SDG. Item d *cor.* 14 *huj.*
eſt DP. VK[e] :: BA. SG[e] :: BAq. BA × SG[f] :: ⊙BAq. ellipſ. e 1. 6. f 6 *hujus.*
BA. SG. [g]ergo ſegmenta conica BVA, SDG æquantur. Cùm g *ſch.* 11 *h.*
igitur ſit port BVA. ſegm con BVA[h] :: 3CV + VK. 2CV + VK h 30 *hujus.*

[i] 31 *huj.* VK[k]:: 3CD + DE. 2CD + DE [i]:: port SDG. ſegm con
[k] *not. infra.* SDG. [l]ergo quoque portiones BVA, SDG æquantur.
[l] 14. 5. *Not.* (Quia CV. VK :: CD. DE. eſt 3CV. VK[m]:: 3CD.
[m] 15. 5. DE. & componendo 3CV + VK. VK :: 3CD + DE. DE. & permutando 3CV + VK. 3CD + DE :: VK. DE. Simili proceſſu
[n] 11. 5. eſt 2CV + VK. 2CD + DE :: VK. DE. [n]quare 3CV + VK. 3CD + DE :: 2CV + VK. 2CD + DE. & permutando.)

Hinc univerſim, poſitâ conditione præditæ portiones æquantur: æquantur enim omnes portioni rectæ BVA. ergo inter ſe.

[*Ad Prop.* XXXVII.]

Schol.

Fig. 165. *Si Sphæroidis duæ portiones* (BVA, SDG) *reſecentur, quarum axes* (VK, DE) *axibus integris, vel ſemiaxibus* (VC, DC) *proportionales ſint, æquales erunt portiones.*

Omnino tali diſcurſu probatur, quali theorema Scholii prop. 33. tantùm loco cor. prop. 14. adhibetur coroll. prop. 15 hujus. Quid plura?

Digitized by Google

DE PLANORUM ÆQUILIBRIIS,
SIVE
Centra Gravitatum in Planis.

Fig. 166.

Libra, *generaliter accepta, aliàs* Latinis *Statera, trutina, lanx, bilanx;* Græcis ζυγὸς & ζυγὰ; τάλαντον & τάλαντα; σταθμὸς, σταθμίον, & σταθμία; πλάστιγξ, τρυτάνη) *eſt machina, vel inſtrumentum magnitudinum, mediante pondere per ipſum explorato, quantitatibus dimetiendis & dignoſcendis comparatum; juxtàque Mathematicam abſtractionem, & ſimplicitatem conſiderata, nil aliud eſt, quàm linea quædam recta, indefinitè utrinque protenſa, in qua punctum aliquod, immobili ſuſtentaculo fultum, inſtarque centri fixum perſiſtit (centri proinde nomine donatum) dum lineæ circa ipſum pars utraque ponderis ubivis incumbentis, aut appenſi niſu, premitur aut attrahitur; ita quidem ut prævalens grave partes, quibus annectitur, deprimat, adverſaſque conſequenter elevet; aſt ſi contranitentia gravia paribus certent efficaciis, tota ſitum conſervet, & in æquilibrio perſeveret. Satis verò conſtat, experientiâ ſuffragante, ponderum in libra vires (ſicut & potentias motivas in vecte, ſimilibuſque machinis) à duabus omnino cauſis dependere; ab ipſius ſcilicet abſoluto pondere, vel ab ipſa magnitudinis (intra certam aliquam phyſicam ſpeciem conſiſtendo) quantitate) & ex ejus à centro diſtantia. Nam & majus pondus ad eandem diſtantiam, & æquale pondus ad eandem diſtantiam gravitandi efficaciâ præpollere compertum eſt. Verùm ad poſteriorem cauſam attendendo, quâ propter ipſam exactâ ratione creſcant aut minuantur vires, haud ita facilè diſcernatur aut demonſtretur à priori.*

Digitized by Google

ri. Sanè quòd æqualium ponderum vires eâdem cum diſtantiis ſuis proportione juſtè creſcant, alterum eſt è præcipuis totius Staticæ, *quam habemus, & totius* Mochlicæ *(totiuſque proinde* Mechanicæ*) fundamentis; cui tamen an ſola* Geometria, *vulgaribus utens poſtulatis & hypotheſibus aſtruendo ſufficiat, equidem non leves ſunt cauſæ dubitandi. Non aliud adſumit hujus Author Libelli (rem ſimpliciter & ſummatim exprimendo) huic principio ſtabiliendo, quàm idem (vel æquale) pondus in majore diſtantia magis gravitare, quo conceſſo vix elici poſſe videtur ponderis ejuſdem vires diſtantiis accuratè proportionari: cur enim inde colligatur eâdem potius quàm aliâ quâvis proportione gravitationem iſtam increſcere. Iſthuc nihilominus enititur hic Author, quo ſucceſſu non diſputo (cum brevitati conſulens, tum quia Cenſorem hîc non ago, nec Advocatum, ſed Interpretem). Cæterum an pro genuino* Archimedis *fœtu ſit agnoſcendus hic libellus, & prorſus idem ſit cum eo, quem* τῶν μηχανικῶν *nomine inſcriptum aliquoties allegat* Archimedes *(de quadr. parab. prop. 6. & 10.) cum pluribus de cauſis ambigere liceat, nil tamen admodum refert anxiè diſquirere; talis ſaltem apparet, ut integram ſuam perfectionem vel non adeptus primo fuiſſe, vel poſtea non retinuiſſe videatur. Sunt tamen in eo, quæ tanti parentis indolem aliquatenus ſapiunt, nec* Archimedeum *planè dedecent acumen. Utcunque perquam utilis eſt, ut qui primò præcipua* Statices *elementa ſternit, &, quantum forte rei natura fert, confirmat; tum figurarum planarum rectilinearum, centra gravitatum, exquiſitâ ſanè methodo multiſque poſteriorum ratiociniis lucem præferente conſignat. Superficiebus autem gravitatem aſſignare non veretur; quidni, æquè ac quantitatem? idem de lineis dictum intellige.*

PO-

Poſtulata, ſeu Hypotheſes.

Petimus (vel ſupponimus)

I. *Æqualia gravia ab æqualibus longitudinibus (ſeu diſtantiis) æquiponderare.*

Schol.

Æqualia gravia, magnitudine, ſiquidem homogenea ſunt; ſin ſpecie diverſa, ſaltem abſoluto pondere; longitudines autem intelligit à centro libræ (hoc eſt ab immobili libram ſuſtinenti puncto) ad centra gravitatis appenſorum ponderum (vel ad rectas ſaltem horizonti perpendiculares per dicta centra tranſeuntes) protenſas. Cùm verò de gravitatis centro hîc potiſſimùm agatur, mirum videatur (vide num id Librum hunc imperfectum & ἀκέφαλον arguat) nullam centri talis definitionem comparere. Ineſſe gravi cuicunque magnitudini punctum aliquod unum, ejuſquam gravis exactè medium, & æqualibus undiquaque momentis ſtipatum, à quo ſuſpenſum vel utcunque ſuſtentatum grave perſiſtet immotum, & ad nullas undicunq; partes vergens aut propendens, à nonnullis poſtulatur, *alii probare conantur. Illud verò gravitatis centrum appellatur, & à *Pappo* ſic definitur: Dicimus autem centrum gravitatis ſinguli cujuſque corporis eſſe punctum quoddam intus ſitum, à quo cogitatione ſuſpenſum grave quieſcit, & delatum conſervat eam, quam ab initio habuit, poſitionem, neutiquam in latione ſua circumlatum.

** Lucas Val. poſt. I.*

vide Pappum l. VIII.

Vide ſis infra Schol. Prop.

Fig. 167.

Sit, ex. gr. ſphæra, cujus diameter A B horizonti paràllela, vel obliqua; ſi concipiatur hæc appendi perpendiculo Z C ad centrum C, perſtabit immota; dimiſſa verò recta procedet*; at ſi perpendiculo Y D appendatur eadem ad aliud diametri punctum D, gyrationem concipiet circa punctum D, & nunquam conſiſtet, donec punctum C, adeóque tota recta A B perpendiculo Y D protracto coincidat: unde punctum C erit centrum gravitatis ſphæræ. (Ita *Pappi* definitionem interpretor, nonnihil à lectione diſcedens, quam *Commandinus* exhibet; nempe pro ἠρεμεῖ φερόμενον, ϗ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν (quod ſenſum præfert perobſcurum, ut videtur, & perplexum) lego (tantùm unam voculam tranſponendo) ἠρεμεῖ, ϗ φερόμενον φυλάσσει δὲ; forſan verò ſcripſerit *Pappus*, ἠρεμεῖ, φερόμενον δὲ; facilè ſiquidem fuit tranſcriptori characterem voculæ ϗ, pro charactere quo deſignatur

** Nullâ vertigine circumlata.*

tur ſi accipere) rei pleniori intelligentiæ quaſdam aliorum ſcriptorum definitiones ſubjungam.

Lib. de centro grav. ſolidorum.

Commandinus. Centrum gravitatis uniuſcujuſque figuræ ſolidæ eſt punctum illud intra poſitum, circa quod undique partes æqualium momentorum conſiſtunt.

Lucas Valerius. Cujuſlibet figuræ gravis centrum gravitatis eſt punctum illud, a quo ſuſpenſum grave per ſe manet partibus quomodocunque circa conſtitutis.

Stevinus. Gravitatis centrum eſt ex quo vel ſolâ cogitatione ſuſpenſum corpus quemcunque ſitum dederis, illum retinet.

Idem. Gravitatis centrum eſt per quod plana quævis ducta corpus in duas partes æquilibres dividunt.

* ῥοπῆς.

Quæ de ſolidis illi pronunciant, tu ſuperficiebus & lineis applica, debitam obſervans analogiam; & adde ſubſequentem *Eutocii* Commentatiunculam: *Archimedes* (inquit) in hoc libellò centrum *propenſionis figuræ planæ reputat, à quo ſuſpenſa manet horizonti parallela; duorum autem vel plurium planorum centrum propenſionis (vel ponderationis) à quo jugum (hoc eſt *Libra*, vel *Statera*) ſuſpenſum horizonti exiſtit parallelum.

Coroll. 1. Ex his, & axiomate præmiſſo conſectatur, quòd libræ centrum eſt centrum gravitatis gravis ex æqualibus gravibus ad æquales diſtantias appenſas compoſiti.

2. Etiam ex hoc axiomate colligitur Gravis cujuſcunque multiplex ad eandem vel æqualem diſtantiam, æquè multiplum habere momentum momenti primo gravi competentis (momentum appellitamus vim gravitandi, ſitu gravis ſimul ac abſoluto pondere conſideratis). Nam ſinguli gravis æqualis appoſitio momentum æquale confert. Ergo totius multiplicis momentum aggregabitur è tot æqualibus momentis, quot ipſum partibus æqualibus conſtat.

Similiter, æquiſecto gravi quocunque, momentum ejus (ad æqualem diſtantiam) æquiſecabitur.

3. Sequitur unicum cujuſque magnitudinis fore centrum gravitatis.

Aliàs duæ rectæ parallelæ (vel duo plana æquidiſtantia) magnitudinem in partes æquiponderantes dividerent, hoc eſt pars toti æquiponderet.

II. Æqualia verò gravia ab inæqualibus diſtantiis non æquiponderare, ſed ad illum grave propendere, quod magis elongatur.

Sch. Æquè patet hoc: ſi gravium æqualium alterum præponderat, illud à libræ centro remotius eſt.

III. Siquidem, cùm à quibuſdam diſtantiis gravia æquiponderent, alteri gravium adjiciatur aliquid; non æquiponderari, ſed ad illud grave propendere, cui quid adjectum eſt.

Æquè liquet, ſi gravia à quibuſdam diſtantiis æquiponderet, eorum alterum magis elongatum præponderare, minúſque diſtans elevari.

IV. Quinetiam ſimiliter, ſi à gravium (æquiponderantium) altero quippiam auferatur, æquilibrium non fieri, ſed ad illud grave inclinari, à quo nil ademptum eſt.

Æquè clarum eſt, ſi gravibus æquiponderantibus adjiciantur vel adimantur æquiponderantia, æquilibrium perſiſtere.

V. Æqualium & ſimilium figurarum planarum invicem congruentium, & centra gravitatum mutuò congruere.

Idem de magnitudinibus aliis (corporibus & lineis) æquè verum & manifeſtum eſt.

VI. Inæqualium autem & ſimilium (figurarum) centra gravitatum ſimiliter erunt poſita.

Definitio.

VII. Puncta verò ſimiliter poni dicimus ad ſimiles figuras, à quibus ad æquales angulos ductæ rectæ faciunt angulos cum homologis lateribus æquales.

Ex g. In ſimilibus triangulis A B C, D E F, ſi à punctis Z, Y ducantur ad angulos rectæ; fuerint verò ſingillatim anguli ad Z æquales angulis ad Y; qui nempe lateribus triangulorum homologis opponuntur. quin & anguli Z A B, Y D E; & Z A C, Y D F, & reliqui reliquis, qui homologis eorundem lateribus adjacent, pares fuerint; ſimiliter poni dicentur hæc puncta Z, Y. Fig. 168. 169.

VIII. Si magnitudines à quibuſdam diſtantiis æquiponderent, & ipſis æquales ab iiſdem diſtantiis æquiponderabunt.

IX. Omnis figuræ, cujus perimeter ad eaſdem partes eſt cava, centrum gravitatis intra figuram ſit oportet. Fig. 170.

Sit in talis figuræ (A B C) perimetro punctum quodvis B, per quod recta linea, vel planum (I X) figuram contingat; ſanè liquet punctum

Digitized by Google

Vide defin., ad poſt. 1. ctum B non eſſe centrum gravitatis figuræ, quia totum pondus ad unas ipſius X T partes jacet ac propendet; multò minùs ex ſimili cauſa punctum D, extra figuram ſitum, erit centrum gravitatis dictæ figuræ. Idem in ipſis lineis ad eaſdem partes cavis intellige; earum nempe centrum gravitatis nec in ipſis, nec ad ipſarum partes convexas, ſed intra cavum exiſtere.

Prop. I.

Converſa 1. poſt. *Quæ ab æqualibus diſtantiis æquiponderant gravia, ſunt æqualia.*

Nam ſi alterutrùm excedat, exceſſu dempto, reſiduum alteri exæquabitur, & [a]æquiponderabit; [b]unde tota non æquiponderabunt, adversùs hypotheſin. ergo neutrum excedit. *Q.E.D.*

a 1 *poſt. huj.*
b 3. *poſt. huj.*

Schol. Hoc æquè verum adde: Quæ ab æqualibus diſtantiis non æquiponderant, ſunt inæqualia.

c 1. *poſt. huj.* Nam ſi æqualia eſſent, [c]æquiponderarent, contra hypotheſin.

Et hoc: Si gravia æqualia æquiponderent, diſtantiæ ſunt æquales. Nam ſi inæquales eſſent, non æquiponderarent, contra hypotheſin.

Prop. II.

Inæqualia gravia ab æqualibus diſtantiis non æquiponderant, ſed ad majus vergent.

Nam ſi à majori dematur exceſſus, reſiduum æquabitur & [a]æquiponderabit minori: quare totum majus [b]præponderat. *Q. E. D.*

a 1. *poſt. huj.*
b 3. *poſt. huj.*

Schol.

Momenta ponderum ad eandem (vel æqualem) à libræ centro diſtantiam, ponderibus ipſis proportionalia ſunt.

Fig. 171. Gravium A, B ad æquales diſtantias C A, C B appenſorum momenta ſint α, β. Sit autem M utcunque multiplex gravis A, & μ æquè multiplum momenti μ. [a]ergo μ eſt momentum gravis M ad diſtantiam C A. Similiter ipſorum B, β ſumptis æquè multiplis N, ν; erit ν momentum gravis N ad B appenſi: quòd ſi M $=$, $\sqsubset$, $\sqsupset$ N, erit reſpectivè μ [b]$=$, [c]$\sqsubset$, [c]$\sqsupset$ ν. unde $A . B :: \alpha . \beta$ *Q.E.D.*

a 2 *cor.* 1. *poſt.*
b 1 *poſt. huj.*
c 2 *hujus.*

Hiſce verò ſuppoſitis.

Prop.

Prop. III.

Inæqualium æquiponderantium (A, B) *diſtantiæ* (C A, C B) *ſunt inæquales; & minor* (C A) *majoris* (A). Fig. 172.

Sit enim A—X $=$ B. ergo ad has diſtantias præponderabit B ipſi A—X. quapropter erit C B $\sqsubset$ C A. *Q.E.D.*

Coroll. Simili modo liquet ab inæqualibus diſtantiis (C A, C B) æquiponderantium (A, B) id majus eſſe, quod eſt à minore diſtantia (C A).

Sit enim C Q $=$ C A. [a]ergo B ad diſtantiam C Q minùs ponderat, quàm ad diſtantiam C B, [b]hoc eſt, quàm A ad diſtantiam C A. [c]unde liquet eſſe B $\sqsupset$ A. *Q.E.D.*

a 2 *poſt. huj.*
b *hyp.*
c *ſch.* 1 & 2 *b.*

Prop. IV.

*Si duæ æquales * magnitudines* (A, B), *non idem habeant centrum gravitatis, ex ambabus compoſita magnitudinis* (A + B) *centrum gravitatis erit medium* (C) *rectæ* (A B) *conjungentis centra gravitatis magnitudinum.* Fig. 173.

* *Magnitudines æquales homogeneas intellige, tum hic, tum in ſequentibus; vel æqualia duo pondera, (nam de æqualibus magnitudinibus ſpecie differentibus (aut ſaltem pondere diverſis) non valet.)*

Quòd centrum compoſitæ magnitudinis A + B ſit in recta A B, προδέδεικται, inquit Auctor; unde colligitur in editis libris aliquid deficere, nam tale quid nullibi præmonſtratum apparet: nos illud verò, ſimul ac illam, quæ præ manibus eſt, propoſitionem è definitione centri gravitatis utcunque deduximuus. vide *Coroll. Scholii ad 1 poſt. hujus.*

Prop. V.

Si trium magnitudinum (A, C, B) *centra gravitatis* (A, C, B) *in directum poſita ſint, & æqualem magnitudines gravitatem habeant, & quæ inter centra ſunt rectæ* (C A, C B) *æquales ſint, ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum* (C) *quod & centrum gravitatis eſt ipſarum mediæ* (C).

Nam quia magnitudo C æquilibratur in puncto C, & huic utrinq; ad æquales diſtantias accedunt æqualia pondera A, B, non mutabitur æquilibrium. *Vide ſch. ad 4. poſt. hujus.*

Vel

a 4 *hujus.*
b *hyp.*

Vel ſic: quia punctum C eſt centrum *gr.* [a]ipſius A + B, & [b]ipſius C; [a] erit totius A + B : + C centrum gravitatis inter C, & C medium, hoc eſt ipſum C.

Coroll.

1. Ex hinc patet, quòd ſi quotcunque magnitudinum multitudine imparium centra gravitatis in directum poſita ſint, ſiquidémque tum æqualiter à media magnitudine diſtantes æqualem gravitatem habeant, tum rectæ ipſarum centris interjectæ æquentur: ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum, quod & ipſarum mediæ centrum eſt gravitatis.

2. Sin autem multitudine pares ſint magnitudines, & centra gravitatis ipſarum in directum poſita ſint, & ipſarum mediæ (*necnon æqualiter utrinque diſtantes à mediis) æqualem gravitatem habeant, & centris interjectæ rectæ æquentur; ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum medium rectæ centra mediarum connectentis, ut ſubſcribitur, (& in appoſita figura expreſſum vides.

* *Iſta verba deſunt in exemplaribus; at ſupplenda eſſe cùm res ipſa docet, tum hujus applicatio in prop. IX (vel 7 in* Baſileenſi Græca) *ubi habentur verba,* καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων &c.

Fig. 174.

Prop. VI.

Fig. 175.

Commenſurabiles magnitudines (Z, Y) *æquiponderant à diſtantiis eandem reciprocè proportionem habentibus cum gravibus.*

a *hyp.*
b 10. 10.
c 3. 10.
d 2 *ax.* 1.
e *conſt.*
f 2 *ax.* 10.
g 15. 5.
k *prius.*

Sint C A. C B :: Z. Y. ergo cùm [a]ſint Z, Y commenſurabiles, [b]erunt quoque rectæ C A, C B commenſurabiles; [c] ſit igitur harum communis menſura M; fiant verò A E, & A D ſingulæ æquales ipſi C B, & B F = C A. [d]ergo eſt E B = C A = B F; & E F = 2 C A; [e] ac E D = 2 C B. [f]ergo M ipſas E F, E D metitur; & eſt E F. E D :: [g] C A. C B [e]:: Z. Y. quoties autem M metitur E F, toties quædam X metiatur Z. quapropter erit M. E F :: X. Z. [k]Item eſt E F. E D :: Z. Y. ergo erit ex æquo M. E D :: X. Y. adeóque quoties M metitur E D, toties X metietur Y; & eſt X menſura communis ipſarum Z, Y. Itaque ſi dividatur E F in partes æquales ipſi M, & Z in totidem æquales ipſi X, & ſingulis ipſius E F particulis ad ipſarum medium punctum appendatur æqualis ipſi X, harum omnium gravitatis centrum erit punctum B (ſiquidem æquinumeræ ſunt hinc inde.) Similíque prorſus ratione punctum A centrum gravitatis erit tot eidem X æqualium, quoties M continetur in E D, ipſam Y componentium, & ſimiliter diſpoſitarum. Harum autem omnium gravitatis centrum erit punctum C, rectam F D biſecans (quippe D A = C B, & A C = B F, ac ideo C D = C F) ergo ſi Z ponatur ad B, & Y ad A, hæ ad diſtantias C B, C A æquiponderabunt. *Q. E, D.*

Coroll.

Si ſit Z. Y $-\!\!\sqsupset$ C A. C B. præponderabit Y ad A poſita ipſi Z ad B conſtitutæ, & vice versâ; ſi Y præponderet ipſi Z, erit Z. Y $-\!\!\sqsupset$ C A. C B.

Schol.

Non ignoro contra diſcurſum hunc quædam objectari, quin ipſe ſuperiùs innui principiis ipſis ſuſpicionis cauſam ſubeſſe: ſed non eſt animus diſputare, nec incumbit mihi judicium interponere. Refero mentem auctoris, eam neq; tuebor, nec impugnabo. In altero de æquiponderantibus, qui vulgò inſcribitur libro, ratiocinium adhibet ab hoc nonnihil diverſum, ſed eiſdem exceptionibus obnoxium. *Prop. 1.*

Prop. VII.

Quinimò ſi incommenſurabiles ſint magnitudines (Z X Y) *à diſtantiis* (C B, C A) *eandem reciprocè cum magnitudinibus proportionem habentibus æquiponderabunt.* Fig. 176.

Si neges; alterutra Z X præponderet, itaque minor eâ quædam æquiponderabit; hanc inter & totam Z X ^{a}ſumatur media quævis Z, ipſi Y commenſurabilis. ^{b}Patet Z (quoniam æquiponderante ^{c}major eſt) ipſi Y præponderare. Verùm ob Z. Y $^{d}-\!\!\sqsupset$ (Z X. Y ^{e}.:) C A. C B; ^{f}præponderabit Y ipſi Z: quæ repugnant.

Similiter è diſtantiis arguamus licet. Si Z X præponderet ad diſtantiam C B, æquiponderet ad E, & inter C B, C E media ^{a}ſumatur aliqua C D ad C A commenſurabilis; ^{k}ergo Z X præponderabit ad D. Sed contra quia Z X. Y ^{e}:: (C A. C B) $^{d}-\!\!\sqsupset$ C A. C D, ^{f}præponderabit Y ipſi Z X ad D poſitæ: quæ rurſus adverſantur ſibi.

a *lemm ad 8. 3. Theod.*
b *3 poſt. hujus.*
c *conſt.*
d 8. 5.
e *hyp.*
f *coroll. præc.*
k *ad 3 poſt.*

Ex duabus præcedentibus univerſalis conflatur hæc propoſitio: *Gravia quælibet è diſtantiis reciprocè proportionalibus æquiponderant.*

Quæ ſimul ac ſemel hoc modò ſuccinctiùs (& *Archimedeis* fermè principiis inſiſtendo) oſtendi poſſit. Sit recta quævis A B, utcunque ſecta in D: biſectis partibus D A, D B in E, & F, totâque A B biſectâ in C; liquet E fore centrum partis D A, & F partis D B, & Fig. 177.

C totius A B ; adeóque D A + D B ſuſtentata in C æquilibrabitur. Cùm igitur ſit $EC = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DA$; & $FC = \frac{AB - DB}{2}$. adeóque E C. F C :: A B − D A. A B − D B :: D B. D A: ſunt rectæ D A, D B centrorum diſtantiis E C, F C reciprocè proportionales : & cum hiſce rectis quælibet gravitates, ipſarùm magnitudinibus proportionales, aſſignari poſſint, æquè de quibuſcunque gravibus hoc verum erit.

Cæterùm ex hoc Palmario, *totiuſque Staticæ præcipuo theoremate* complura ſubnaſcuntur *Corollaria.*

I. Si gravia qualibet è quibuſvis diſtantiis æquiponderent, etiam iis proportionalia quævis gravia ab iiſdem diſtantiis (homologa homologis) æquiponderabunt.

11. 5. Retinebitur enim reciproca gravium & diſtantiarum proportionalitas.

II. Si æquiponderantibus addantur aut ſubtrahantur æquiponderantia, tota vel reſidua æquiponderabunt.

12. 5. Nec enim hìc immutabitur reciproca proportionalitas.

Axiomatis accenſeri meruit hæc propoſitio, ſuprà nobis, *Ubaldo*, & aliis.

Fig. 178. *III. Æqualium gravium* (A, B) *momenta diſtantiis ſuis* (C A, C B) *proportionalia ſunt.*

Quâvis aſſumptâ diſtantiâ C Q concipiatur eſſe Z. A :: C A. C Q. a 6, 7 *hujus.* [a]ergo ponderis Z ad Q ſuſpenſi momentum æquatur momento ponderis A ad diſtantiam A C. Item ſit B (vel A). Y :: C Q. C B. [a]ergo momentum ponderis Y ad Q æquatur momento ponderis B ad diſtantiam B C. Eſt autem ex æquo Z. Y :: C A. C B ; & momenta ponderum Z, Y ad Q ſuſpenſorum b *ſch.* 2 *huj.* [b]ipſis Z, Y prodortionalia ſunt. ergo liquet propoſitum.

IV. Quorumcunque gravium (A, B) *ad quaſcunque diſtantias momenta compoſitam habent è ponderum ipſorum & diſtantiarum* (C A, C B) *proportionibus rationem.*

Nam momentum ponderis A in A poſiti ad momentum ponderis B in B, c 20. *def.* V. rationem [c]habet compoſitam è ratione momenti ponderis A d *cor. præc.* in A ad momentum ponderis A in B poſiti ([d]hoc eſt è ratione diſtantiæ C A ad C B) & è ratione momenti ponderis A in B ad momentum ponderis B in B poſiti ([c]hoc eſt è ratione ipſius A ad B). Hinc verò *c ſch. 2 hujus.*

V. *Momenta gravium ſe ad invicem habent, ut ipſa gravia ducta in ſuas diſtantias.*

Nempe C A × A repræſentat momentum gravis A ad diſtantiam A C; & B × B C momentum exhibet gravis B ad diſtantiam B C.

Hinc quòd è gravi in ſuam diſtantiam ducto provenit, à quibuſdam momentum appellatur; quale momentum notum & diſtantiæ applicatum exhibebit ipſum grave; per ipſum verò grave diviſum diſtantiam notificabit.

VI. Si recta (A B) *duarum quarumvis magnitudinum centra* (A, B) *connectat, ex iis compoſitæ magnitudinis centrum in iſta recta* (A B) *exiſtet.* Fig. 179.

Nam ſi diviſa concipiatur recta A B in C, [a] ſic ut ſit A. B :: C B. C A; [b]magnitudines A, B ad diſtantias C A, C B æquiponderabunt; [c]adeóque punctum C erit centrum gravitatis compoſitæ A + B. unde

a 10. *6.*
b *6 & 7.*
c *not. ad 1 poſt.*

VII. Si quotcunque magnitudinum centra ſint in una recta, compoſitæ ex omnibus magnitudinis centrum in eadem exiſtet.

Nam compoſitæ ex duabus quibuſcunque centrum in illa [d]erit, tum ejus compoſitæ, ut unius, & tertiæ centrum in eadem erit; ac harum trium, & alterius quartæ conſimili pacto, & ſic porro, donec ad omnium ſummam perventum eſt. d *6 cor.*

Prop. VIII.

Si ab aliqua magnitudine (MNO) *detrahatur magnitudo* (M N P) Fig. 180.
non habens idem centrum cum toto, reliquæ magnitudinis (N P O) *cen-*
trum gravitatis eſt, ſi recta (A C) *gravitatum centra, totius magni-*
tudinis, & ablatæ connectens, protrahatur ad eaſdem partes, ad quas
eſt totius magnitudinis centrum (C), *& accipiatur quædam* (CB) *è*
protracta dicta centra conjungente, ſic ut eandem rationem habeat ad il-
lam(CA) *centris*(CA) *interjectam, quam habet gravitas ablatæ magni-*
tudinis (MNP) *ad gravitatem reliquæ* (NPO), *acceptæ terminus* (B).

[a] Patet enim centra totius & partium in una recta (B C) verſari; *a 6 cor. præc.*
poſitóque puncto D reſiduæ N P O centro, quia C totius M N O *b hyp.*
centrum [b]eſt, [b]& A partis M N P, [c] erit C D. C A :: M N P. N P O *c 6 & 7 hujus.*
[b]:: CB.

Digitized by Google

d 9. 5.
c conſt.

[b]:: C B. C A. [d]ergo C D = C B: & puncta D, B coincidunt. [e]quare B eſt centrum partis N P O. *Q.E.D.*

Coroll.

Fig. 181.

Ex his facilè (juxta methodum, vel hypotheſin indiviſibilium) conſectatur centrum gravitatis figuræ cujuſlibet planæ in ejus, ſiquam habet, diametros (hoc eſt in recta baſi parallelas rectas biſecante) verſari; necnon centrum gravitatis figuræ cujuſcunque ſolidæ in ejus axe (hoc eſt in recta per parallelorum baſi planorum centra tranſeunte) reperiri.

a 7 cor. præc.

Nam quia, verbi gr. centra rectarum M N (baſi B A parallelarum) ſunt in diametro V K, [a]erit ex omnibus conſtitutæ figuræ V B A centrum in eadem V K. Idem de ſolidis liquidò clarum eſt; quin & de ſuperficiebus, & lineis quibuſvis axem habentibus, aut axi rectam analogam.

Prop. IX.

Fig. 182.

Omnis parallelogrammi (M N O P) *centrum gravitatis exiſtit in recta* (V K) *oppoſitorum parallelogrammi laterum biſegmenta connectente.*

Ex præcedente corollario ſatis liquet, at moroſius *Archimedes* hoc modo.

a cor 1. 10.
b 29. 1. & 1. def. 6.
c 36. 1.
d cor. 5.
* Hoc ſumit auctor, aſt ubi probaverit, non reperio; expendas annon principium petat.

Si negas, eſto centrum alicubi extra V K in D; per quod ducatur D C ad M N parallela. Continuâ jam æquiſectione rectæ V N aliquando [a]relinquetur ſegmentum $VK \sqsupset CD$; ſimilitérque diviſâ V M, ſi per utriuſque ſegmenti (V N, V M) diviſiones ducantur ad V K parallelæ, diſpertietur totum parallelogrammum M O in parallelogramma [b]ſimilia, & [c]æqualia ipſi Q K, & ad utraſque rectæ V K partes æquinumera; [*quin & horum omnium centra ſunt in una recta, pariter à ſe diſſita;] [d]ergo totius ex his compoſiti parallelogrammi M O centrum exiſtet in recta mediorum centra connectente. Verùm D extra medium Q K ſitum eſt. ergo D non eſt centrum, contra quod ipſe aſſeruiſti.

Aliter.

Fig. 183.
f 36. 1.
g 29. 1. & 1. def. 6.

Sint A, B centra parallelogrammorum M K, V O, quæ connectat recta A B, ſecans ipſam V K in C, ducantúrque A K, B V. & quoniam parallelogramma M K, V O [f]æqualia ſunt, ac [g]ſimilia, ſi conjungantur ea, ipſorum centra congruent. Quare rectæ A K, B V

ad æquales & congruentes angulos ductæ) congruent, ut & anguli h 5. *poſt. hujus.*
VKA, KVB : ſed & anguli ACK, VCB [k]pares ſunt. [l]ergo re- k 15. 1.
ctæ CA, CB congruent, & æquales erunt. [m]ergo CA. CB :: pgr l 26. 1.
VO. VP ; [n]conſequenterque punctum C eſt centrum totius paralle- m 7. 5.
logrammi MO. *Q.E.D.* n *vid.6 cor.* 7. *hujus.*

Coroll. Simul patet centrum C rectam VK biſecare. Nam recta CV, CK congruent.

Simili diſcurſu oſtendetur in *circulo, ellipſe, ſphæra, ſphæroide, (talibuſque cæteris figuris)* idem eſſe centrum gravitatis, & ipſius figuræ. Fig. 184.

Sit enim VK diameter, & A, B centra gr. ſegmentorum VMK, VNK; quæ, ſegmentis congruentibus, congruent. adeóque triangula ACK, BCV congruent; & propterea CA = CB; ac VMK. VNK :: CB. CA. adeóque C eſt centrum gr. totius. quinetiam CV = CK; & proinde C eſt centrum figuræ. Liquet igitur.

Prop. X.

Cujuſcunque parallelogrammi (MNOP) *centrum gravitatis eſt punctum* (C) *in quo diametri conveniunt.* Fig. 185.

Recta VK biſecet adverſa parallelogrammi latera MN, PO; &
EF biſecet latera MP, NO. [a]Igitur in utraque VK, EF eſt cen- a 9 *hujus.*
trum gravitatis parallelogrammi MNOP; [b]ergo interſectio C eſt b 10 *ax.* 1.*el.*
centrum: ſed & in hoc diametri conveniunt: nam connexis CM, c *conſt.* & 34.1.
CO; quia CK [c]= CV; & KO [c]= VM, & ang CKO [d]= d 29. 1.
ang CVM, eſt ang KCO [e]= ang VCM; adeoque OCM [f]eſt e 4. 1.
linea recta: quare diameter MO per C tranſit. Simili diſcurſu du- f 2 *ſch.* 15.1.
cta diameter PN per C tranſibit. Et liquet propoſitum.

Prop. XI.

Si duo triangula (VBA, XDE) *ſimilia ſint inter ſe, & in ipſis puncta* (C, K) *poſita ſimiliter ad triangula; unumque punctum* (C) *trianguli in quo exiſtit centrum ſit gravitatis, etiam reliquum punctum* (K) *eſt centrum gravitatis trianguli, in quo exiſtit.* Fig. 186. Fig. 187.

Si negas, aliud Z centrum eſto; rectæque ducantur à punctis K, a *hyp.*
C, Z ad angulos æquales D, B; & E, A. Et quia puncta Z, C ſunt ſi- b 6 *poſt. hujus.*
milium triangulorum XDF, VBA [a] centra, [b]ſimiliter erunt poſita; c 7 *poſt hujus.*
[c]quapropter anguli ZDE, CBA pares ſunt. At verò quia puncta

K,

d 1 ax. 1. el. K, C [b]ſimiliter poſita ſunt, [c] etiam ang K D E = ang Z D E. [d] ergo
e 9. ax. 1. anguli K D E, Z D E æquantur. [e] *Q.E.A.*

Prop. XII.

Fig. 188. *Si duo triangula* (V B A, X D E) *ſimilia ſint, unius autem triangu-*
189. *li* (V B A) *gravitatis centrum* (C) *ſit in recta* (V L) *ab angulo quopiam ad mediam baſin ducta, etiam reliqui trianguli centrum gravitatis erit in conſimili ducta rectâ* (X M).

a 10. 6. [a]Fiat V L. V C :: X M. X K; & connectantur rectæ C B, C A;
b hyp. K D, K E. & quia V B. B A [b]:: X D. D E; erit conſequentes bifariando V B. B L :: X D. D M. Item ang V B L = [b]X D M. [c]ergo
c 6. 6. triangula V B L, X D M ſimilia ſunt; [c] & eſt B V. V L :: D X. X M.
d conſt. ergo cùm ſit V L. V C [d]:: X M. X K; erit ex æquo V B. V C :: D X. X K. [c]ergo triangula B V C, D X K ſimilia ſunt. quare reliqua triangula C B L, X D M etiam ſimilia ſunt. Simili diſcurſu pa-
e 7. poſt. hujus. tebit triangula C V A, K X E; & triangula C A L; K E M aſſimi-
f hyp. lari. [e]quare puncta C, K ſimiliter poni conſtat. unde cùm C [f]ſit cen-
g 6. poſt. trum trianguli B V A, [g]erit K trianguli D X E centrum. *Q.E.D.*

Prop. XIII.

Fig. 190. *Omnis trianguli* (V B A) *centrum gravitatis eſt in recta* (V K) *quæ ab angulo* (B V A) *in mediam deducta eſt baſin.*

Conſtat hoc aliquatenus è dictis apud Prop. 8. aſt *Archimedeam* ἀκρίβειαν negligere non licet, quam plerique juniores, in hujuſmodi materiis, imitantur. Fontes, è quibus poſteritas hauſit, & exemplaria quæ reſpexit, imprimis jucundum eſt contemplari. Sic igitur procedit Auctor noſter.

Si negas; eſto centrum Z, extra rectam V K; & ab Z ducatur
a cor. 1. 10. Z Y ad A B parallela. [a]Biſecetur K A continuò, donec ſegmentum K E minùs evadat ipſâ Z Y; ſimilique ratione dividatur reliqua ſemiſſis K B; tum utrinque per diviſionum puncta ducantur rectæ E O, F N, G M, H R, I Q, L P, ad V K parallelæ; connectantúrque rectæ P M, Q N, R O (quæ baſi B A parallelæ erunt; quia V K.
b 4. 6. M G [b]:: A K. A G [c]:: B K. B L [b]:: V K. P L; [d]ideóque M G = P L,
c ſch. 7. 5. & ſimili diſcurſu F N = I H &c). Liquet autem parallelogrammo-
d 9. 5. rum L M, φ N, ψ O centra gravitatis [e] exiſtere in recta V K (eorum
e 9 hujus. quippe

quippe baſes [f]biſecanti) & proinde totius ex iis compoſitæ, triangulo inſcriptæ figuræ, [g]centrum in eadem V K fore; quod ſit C; connectatur C Z, eique protractæ occurrat A S ad K V parallela. Patet autem triangulum V K B ad reſidua triangula P L B, Q φ P, R ψ Q, V X R, *ſimul ſumpta ſe habere ſicut K B ad K H, (nam ductâ VH, triangulum V K H triangulis P L B, Q φ P, R ψ Q, V X R æquatur; quoniam altitudo illius horum [g]altitudinibus ſimul ſumptis, & baſis ejus horum ſingulæ baſi æquatur; éſtque triang V K B . V K H [h]:: K B. K H. Item ſimili de cauſa patet triang V K A ad triangula M G A, V X O, & reliqua ex iſta parte, ſe habere ſicut K A ad K E (vel K B ad K H). *ergo junctim totum triangulum B V A ſe habet ad iſta cuncta reſidua triangula, ſicut K A ad K E, [k]hoc eſt ut C S ad C D; [l]hoc eſt in majori ratione quàm C S ad C Z. quare dividendo habebit figura dictis parallelogrammis conſtans ad reſidua cuncta triangula majorem rationem quàm Z S ad Z C; ſit ergo ſumma parallelogrammorum iſtorum ad dictam ſummam triangulorum, ut Z T ad Z C; ergo cùm ſit Z T. Z C ⊏ Z S. Z C. [m]erit Z T ⊏ Z S. quia verò Z eſt centrum gr. totius trianguli B V A, & C centrum dictæ ſummæ parallelogrammorum, & ſe reciprocè habet Z T ad Z C, ut ſumma parallelogrammorum ad reſiduam ex toto B V A ſummam triangulorum; [n]erit T centrum gravitatis dictæ reſiduæ triangulorum ſummæ; quod fieri ſanè [o]nequit; quoniam T ad unas hujus compoſitæ magnitudinis partes, & extra totum triangulum B V A poſitum oſtendebatur. Itaque potius trianguli centrum eſt in recta V K. *Q.E D.*

[f] *hyp & ſch.* 4 6.
[g] 7 *cor.* 7 *huj.*
* 12. 6.
[g] 2. 6. & 12. 5.
[h] 1. 6.
[k] 2. 6.
[l] 8. 5.
[m] 10. 5.
[n] 8 *hujus.*
[o] 9 *poſt. hujus.*

Aliter.

Si fieri poteſt, eſto centrum extra V K ad Z; connectantur Z V, Z B, Z A; & K R, K S biſecent ipſas V A, V B (unde patet KRVS eſſe parallelogrammum) item ducantur R T, S X ad V Z parallelæ, & connectantur S R X T, Z K, M N. Hinc cùm ſit B Z. B X [a]:: B V. B S [b]:: B A . B K [c]:: A B . A K [b]:: A V . A R [a]:: A Z . A T; [d] liquet S R, B A, X T, parallelas eſſe; & [d]K X, A Z, [d] & K T, B Z etiam eſſe parallelas. [e]Igitur in ſimilibus triangulis A R K, B S K, A V B puncta T, X, Z ſimiliter poni liquet. ergo cùm Z [e]ſit centrum trianguli A V B, [g]etiam T, X erunt centra triangulorum A R K, B S K. ergo punctum N rectam X T [h]biſecans, [k]erit centrum è triangulis A R K, B S K [l](æqualibus nempe) compoſitæ magnitudinis. Punctum verò M [m]eſt centrum parallelogrammi K R V S (diametrorum utique interſectio) [n]ergo totius ex iſtis triangulis, & hoc parallelo-

Fig. 191.
[a] 4. 6.
[b] *conſt.* & 15. 5
[c] 7. 5.
[d] 2. 6.
[e] 7. *poſt. huj.*
[f] *hyp.*
[g] 6 *poſt huj.*
[h] *hyp. ſch.* 4. 6.
[k] 4 *hujus.*
[l] 26. 1.
[m] 10. *hujus.*
[n] 6 *cor.* 7 *huj.*

grammo compoſiti trianguli V B A centrum erit in recta M N. Eſt
verò M N (parallelogrammi quippe S R T X latera biſecans) ad R T,
o 33. 1. adeóque ad V Z [o]parallela, quapropter erit punctum Z extra rectam
M N. ergo Z non eſt centrum, contra quam affirmabas.

Prop. XXIV.

Fig. 192. *Omnis trianguli* (B V A) *centrum gravitatis eſt punctum* (C) *in quo concurrunt rectæ* (V K, B E) *ab angulis ad media latera ductæ.*

a 13 *hujus.* [a]Eſt enim centrum in utraque V K, B E; [b] ergo in communi pun-
b 10. *ax.* 1. cto.

Coroll. 1. Viciſſim rectæ ab angulis per centrum biſecant latera.
Aliàs enim, quum centrum ſit in iis quæ biſecânt, plura forent cen-
b 3 *cor. ſch* 1. *poſt. hujus.* tra; [b]quod fieri nequit.

2. Tres ab angulis rectæ adverſa latera biſecantes in uno puncto concurrunt. In centro nempe trianguli.

3. Recta C K $= \frac{1}{3}$ V K.

c 2. 6. Nam connexa F E eſt ad B A [c] parallela; quapropter eſt C G.
d 4. 6. K C [d]:: C E. B C [d]:: F E. B A [d] :: V G. G K [e] :: 1. 2. ergo compo-
e *ſch.* 4. 6. nendo eſt G K. C K :: 3. 2. adeóque V K. C K :: 3. 1.

Hoc corollarium *Archimedeis* autographis excidiſſe videtur: nam indemonſtratum (opinor) non aſſumeret auctor; quod facit tamen in proximè ſequenti.

Prop. XV.

Fig. 193. *Omnis trapezii* (B M N A) *duo latera* (B A, M N) *ſibi parallela habentis centrum gravitatis* (C) *eſt in recta* (XK) *parallelarum biſectiones conjungentes, ſic diviſâ, ut pars ejus* (X C), *terminum habens biſegmentum minoris* (M N) *parallelarum, ad reliquam partem* (C K) *hanc habeat rationem, quam habet utraque ſimul, æqualis duplæ majoris cum minori ad duplam minoris cum majori parallelarum* (X C. C K :: 2B A + M N. 2MN + B A).

a *ſch.* 4. 6. Quod centrum trapezii ſit in X K patet; quoniam productis B M,
b 13 *hujus.* A N ad concurſum in V, ducta V K ipſam M N quoque [a] biſecat,
c 8 *hujus.* adeóque rectæ XK coincidit; & hinc utriuſque trianguli V B A,
d 10. 6. V M N centrum [b]eſt in V K, [c]adeóque reliqui trapezii B M N A cen-
trum in eadem exiſtit. Porro [d]ſecetur recta X K trifariam in punctis
H, G; per quæ ducantur rectæ O P, Q R ad B A parallelæ; itaque
ductis

ductis B X, N K, B N, has quoque [e]triſecabunt parallelæ O P, Q R. [f]ergo liquet punctum E fore centrum trianguli B N A ; [f]& punctum F eſſe centrum trianguli M B N ; adeóque connexâ E F, [g]hujus & [h]ipſius X K interſectio C erit centrum totius trapezii BMNA. [c]quapropter erit triang B N A. triang M B N ([k]hoc eſt B A. M N) :: C F. C E [l]:: C H. C G. unde antecedentes duplando compoenndóque eſt 2 B A + MN. MN :: 2 CH + CG. CG. Item ſimili diſcurſu (inversè) 2 M N + B A. B A :: 2 C G + C H. C H. Igitur (iſtic & hîc permutando) 2 B A + M N. 2 C H + C G :: M N. C G :: B A. C H :: 2 M N + B A. 2 C G + C H. & rurſus permutando 2 B A + M N. 2 M N + B A :: 2 C H + C G. 2 C G + C H. Eſt verò 2 C H + C G [r]= (C H + H G [r]=) C X. & 2 C G + C H = (C G + H G [r]=) C K. [s]quare 2 B A + M N. 2 M N + B A :: C X. C K. *Q.E.D.*

[e] 2. 6.
[f] 13 & 3. *cor.* 14 *hujus.*
[g] 6 *cor.* 7 *huj.*
[h] *prius.*
[k] 1. 6.
[l] 4. 6.
[r] *conſt.* & 2 *ax.* 1.
[s] 11. 5.

De Quadratura Parabolæ.

Archimedes Doſitheo Felicitatem.

CUM audirem obiiſſe *Cononem*, qui nobis adhuc ſuperſtes erat in amicitia, te verò *Cononis* familiarem fuiſſe, & Geometriæ eſſe gnarum; illi quidem demortuo indoluimus ceu vero amico, & in Mathematicis planè mirabili; tibi verò protinus deſtinavimus mittere ſcribentes, ut *Cononi* decreveramus ſcribere, è Geometricis theorematis illud, quod antea quidem nemo contemplatus erat, à nobis verò jam perſpectum eſt; primò quidem per mechanica repertum, poſtea verò Geometricè demonſtratum. Eorum ſanè, qui priùs Geometrica tractârunt, nonnulli aggreſſi ſunt ſcribere, ut poſſibile ſit *circulo dato, & circuli dato ſegmento æquale rectilineum ſpatium invenire*; nec non poſtea comprehenſum ſub *totius coni ſectione, & recta ſpatium quadrare tentârunt; aſſumentes quæ nemo facilè conceſſerit *lemmata*; unde à multis illi damnati ſunt hæc non adveniſſe. Veruntamen qui *parabolæ* ſegmentum comprehenſum quadrare conatus fuerit, anteriorum ſcimus neminem, quod certè nunc à nobis inventum eſt; demonſtratur enim *quòd omne ſegmentum comprehenſum ſub recta, & parabola, ſeſquitertium eſt trianguli baſin habentis eandem, & altitudinem æqualem cum ſegmento*; hoc aſſumpto lemmate ad ejus demonſtrationem, quòd inæqualium ſpatiorum exceſſus (quo majus excedit minus) poteſt ibi ſibimet apponi, ut omne propoſitum finitum ſpatium exuperet: uſurpârunt autem hoc lemma qui priùs extiterunt Geometræ; *etenim circulos duplicatam inter ſeſe diametrorum rationem* habere demonſtrârunt hoc utentes lemmate;

*ellipſis (*opinor.*)

De ſph. & cyl. 1. ax. 5.

lemmate; & quòd *ſphæræ triplicatam inter ſe rationem habent diametrorum*; quinetiam *quòd omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis eandem cum pyramide baſin habentis, & altitudinem æqualem*; & quòd *omnis conus ſubtriplus eſt cylindri eandem cum cono baſin habentis, & æqualem altitudinem*, ſimiliter prædictum lemma ſumentes ſcripſerunt. Evenit verò prædictorum theorematum ſingulis haud ſecus ac illis quæ abſque hoc lemmate demonſtrata ſunt adhibitam eſſe fidem; perinde etiam in ſimilem fidem adductis iis, quæ nos edidimus. Ejus igitur exſcriptas demonſtrationes mittimus, primò ſicut è mechanicis comperta ſunt, poſtea verò prout etiam per Geometrica demonſtrantur, præmittuntur autem & Elementa Conica, quæ ad demonſtrationem uſum habent. Vale.

Prop. I.

Fig. 194. *Si ſit parabola* A B G; *ſit autem recta* B D *parallela diametro,*
Apol. 46. 1. *vel ipſa diameter; recta verò* A G *parallela illi, quæ coni ſectionem hanc contingit ad* B; *erunt* D A, D G *æquales. Sin &* D A *æquetur*
Apol. 5. 2. *ipſi* D G, *parallelæ erunt ipſa* A G & *ea quæ ſectionem contingit ad* B.

Prop. II.

Apol. 35. 1. *Si ſit parabola* A B G; *ſit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipſa diameter; ipſa verò* A D G *parallela ei quæ ſectionem contingit ad* B; *at recta* G E *ſectionem comtingat in* G; *erunt* B D, B E *æquales.*

Prop. III.

Si ſit parabola A B G; *recta verò* B D *diametro parallela, vel ipſa*
Apol. 20. 1. *diameter; & ducantur quædam rectæ* D G, Z H *parallelæ tangenti parabolam in* B; *erit ut* B D *longitudine ad* B Z, *ita* D G *potentiâ ad* Z H.

Hæc ſanè (ait *Archimedes*) demonſtrantur in conicis Elementis. —Cæterùm ambigi poteſt, utrum *Archimedes* Elementa citaverit, an ejus Tranſcriptores, omiſſis quas is appoſuerat demonſtrationibus ad illa nos ablegaverint. Utique de Conicis, quæ *Archimedis* temporibus extabant, Elementis nihil conſtat: iſta ſaltem apud *Apollonium* jam habentur locis citatis.

Prop. IV.

Fig. 195. *Sit portio* A B G *comprehenſa ſub recta & parabola; recta verò*
Fig 196. D B *à medio ipſius* A G *parallelo diametro ducatur, aut ipſa ſit diameter; & connexa recta* G B *producatur; quòd ſi deducatur altera quæpiam* T Z *ipſi* B D *parallela, ſecans utramque rectarum* A G, B G; *eandem rationem habebit* Z T *ad* T I *quam* D A *ad* D Z.

a 2. 6. Nam ducatur I K ad A G parallela: éſtque B Gq. B Tq[a] :: (D Gq.
b 34. 1. D Zq[b] :: D Gq. K Iq[c] :: B D. B K[d] ::) B G. B F. [e]quare B G, B T,
c 3 *hujus.* B F ſunt ∺. [f]unde B G. B T :: B G ± B T. B T ± B F :: T G. T F
d 4. 6. [d] :: T Z. T I. [a]eſt autem D G. D Z :: B G. B T. [g]Ergo D G (D A).
e 20. 6. D Z :: T Z. T I. *Q.E.D.*
f 19. 5.
g 11. 5.

Prop.

Prop. V.

Fig. 197.

Si portio A B G *contenta ſub recta & parabola; & ab* A *ducatur diametro parallela* Z A; *à* G *verò ſectionem tangens in* G, *nempe* G Z: *ſiquidem in trigono* Z A G *ducatur aliqua* (KL) *parallela* A Z; *ducta* (KL) *in eadem ratione ſecabitur à parabola, ac* A G *à ducta; homologa verò erit pars* (AK) *ipſius* AG *ad* A *ductæ parti* (KH), *quæ ad* A G.

Sit D B diameter parabolæ, & producantur D B E, G B M. Et ob D B [a] = B E, [b] erit K I = I L; [c] item K I. I H :: A D. D K; & permutando K I. A D :: I H. D K :: [d] $KI \pm IH$. $AD \pm DK$ :: K H. A K. [e] ergo 2 K I. 2 A D (hoc eſt K L. A G) :: K H. A K [d] :: K L — K H. A G — A K :: H L. K G; permutandóq; K H. H L :: A K. K G. *Q.E.D.*

Coroll. [f] K L. K H :: A G. A K.

a 2 *hujus.*
b *cor.* 4. 6.
c 4 *hujus.*
d 19. *vel* 12. 5.
e 15. 5.
f 4, & 18. 5.

Prop. VI.

Fig. 198.

Intelligatur verò illud (quod & in ſpeculatione proponitur conſpiciendum) in (plano) recto ad horizontem, & in linea A B; *dein quæ ſunt ad eaſdem partes cum* D *concipiantur deorſum, quæ verò in adverſas ſurſum; Triangulum verò* B D G *ſit rectangulum, habens rectum ad* B *angulum, & latus* B G *æquale dimidio jugi, videlicet ut æquetur* BA *ipſi* B G; *ſuſpendatur verò triangulum ex punctis* B, G; *ſuſpendatur verò & aliud ſpatium* Z *ab altera parte jugi ad* A; *& æquiponderet ſpatium* Z *ſuſpenſum ad* A *trigono* B G D, *in ſitu quo jam ponitur: dico ſpatium* Z *trigoni* B D G *tertiam eſſe partem.*

Sit enim B E = $\frac{1}{3}$ B G; ducatúrque E C ad B D parallela; itaq; centrum gr. trigoni G B D [a] eſt in E C, & hoc ſuſpenſum ab E conſiſtet ipſi Z æquiponderans; quare triang G B D. Z [b] :: (A B. B E :: G B. B E ::) 3. 1. *Q.E.D.*

Converſè. Si Z = $\frac{1}{3}$ triang BDG, æquiponderabunt Z, & BDG.

a 3 *cor.* 14. 1. *de æquip.*
b 6 & 7. 1 *de æquip.*

Prop. VII.

Fig. 199.

Sit rurſus linea A G *jugum, medium verò ipſius ſit* B; *& ſuſpendatur ad* B *trigonum* G D H; *ſit verò trigonum* G D H *ambligonium, habens baſim* D H, *altitudinem verò parem dimidio jugi* (B G); *& ſuſpendatur trigonum* G D H *è punctis* B, G; *ſpatium verò* Z *ſuſpenſum ad* A *æquiponderet triangulo* G D H *ſic habenti ut nunc jacet: ſimiliter*

Digitized by Google

militer de monſtrabitur ſpatium Z tertiam eſſe partem trigoni G D H.

a conv. 6 huj.
b 2 cor. 7. de de æquip.
c conſt.

Nam ſpatio Z adjiciatur $E = \frac{1}{3}$ triang B D G ; [a] quapropter E æquiponderat trigono B D G ; [b] ergo $Z + E$ æquiponderat toti B H G. quare $3\,Z + 3\,E =$ triang B H G ; unde cùm $3\,E$ [c] $=$ triang B D G ; erit $3\,Z = D\,H\,G$. *Q.E.D.*

Prop. VIII.

Fig. 200.

Sit jugum A, *medium verò ipſius* B ; *& ſuſpendatur ad* B *trigonum rectangulum* G D E, *rectum habens angulum* E ; *& ſuſpendatur è jugo ſecundum* G E ; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ad* A, *& æquiponderet ipſi* G D E *ſic habenti ut nunc jacet ; quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trigonum* G D E *ad ſpatium* C *: dico ſpatium* Z *trigono* G D E *minus eſſe, ſed ipſo* C *majus.*

a 6 & 7. 1 æquip.
b 14. 5.
c 8. 1. 5.
d hyp.
e 10. 5.

Sit trigoni E G D centrum gr. in perpendiculari H F ; [a] quare Z triang E G D :: H B. B A. [b] ergo $Z \sqsupset$ triang E G D. Item H B. B A [c] $\sqsubset$ E B. B A [d] :: C. triang E G D ; adeoque Z. E G D. $\sqsubset$ C. E G D. [e] ergo $Z \sqsubset C$.

Prop. IX.

Fig. 201.

Sit rurſus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B, *trigonum verò* G D C *ambligonium, baſin quidem habens* D C, *altitudinem verò* E G ; *& appendatur è jugo ſecundum* G E ; *ſpatium verò* Z *dependeat ab* A, *& æquiponderet trigono* G D C, *ſic habenti ut modò ponitur ; quam vero rationem habet* A B ad B E, *hanc habeat trigonum* G D C *ad* L : *dico ipſum* Z *majus quidem eſſe ipſo* L, *minus verò ipſo* G D C.

Demonſtratur ut præcedens.

Prop. X.

Fig. 202.

Sit rurſus A B G *quidem jugum, & medium ejus* B ; *trapezium verò* B D C H, *angulos quidem ad puncta* B, H *rectos habens, latus verò* C D *inclinans verſus* G ; *& quam habet rationem* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* B D C H *ad* L ; *ſuſpenſum verò ſit trapezium* B D C H *è jugo ad* B H ; *item ſuſpendatur ſpatium* Z *ad* A, *& æquiponderet trapezio* B D C H, *ita ſe habenti ut jacet : dico ſpatium* Z *minus eſſe ipſo* L.

Nam [a]ſit centrum trapezii B D C H in recta E F ad A G perpen- a 15. 1 *æquip.*
diculari : éſtque trap B D C H. Z (:: [b]A B. B E) [c]$\sqsubset$ (A B. B H [d]::) b 6 & 7 *æquip.*
trap B D C H. L. [e]ergo Z $\sqsupset$ L. *Q. E. D.* c 8. 5.
d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XI.

Fig. 203. *Sit rurſus jugum quidem* A G, *& medium ipſius* B ; *ſit verò trapezium* CDTR *habens quidem latera* C D, T R *tendentia ad* G, *ſed ipſa* D R, T C *perpendicularia ad* B G ; *& cadat* D R *in* B ; *quam verò rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* C D T R *ad* L ; *trapezium verò* CDTR *ſuſpendatur ex jugo ad* BH ; *&* Z *ex* A ; *ac æquiponderet* Z *trapezio* C D T R, *ſic habenti ut modò jacet : ſimiliter ac priùs demonſtrabitur ſpatium* Z *minus ipſo* L.

Imò planè ſimiliter ac priùs ; quid ergo plura ?

Prop. XII.

Fig. 204. *Sit rurſus jugum quidem* A G, *medium verò ejus* B ; *ſit verò trapezium* D E H C, *ad puncta quidem* E, H *rectos habens angulos, latera verò* C D, E H *vergentia ad* G ; *& quam quidem rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* D E H C *ad* M ; *quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trapezium* B E H C *ad* L ; *ſuſpendatur verò trapezium* D E H C *è jugo ad* E H ; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio ita ſe habenti, ut nunc ſubjicitur : dico* Z *majus eſſe ipſo* L, *minus verò ipſo* M.

[a]Sit enim trapezii D E H C centrum gr in K N ad E D parallela ; a 15. 1 *æquip.*
hinc trap D E H C. Z ([b]:: A B. B K) [c]$\sqsupset$ (A B. B E [d]::) trap D E H C. b 6 & 7. 1 *æ-*
L ; [e] quare Z $\sqsubset$ L. Item trap D E H C. M ([d]:: A B. B H) [c]$\sqsupset$ c 8. 5. *(quip.*
(A B. B K [b]::) trap D E H C. Z ; [e]unde Z $\sqsupset$ M. *Quæ E. D.* d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XIII.

Fig. 205. *Sit rurſus jugum quidem* A G, *& medium ejus* B, *trapezium verò* C D T R, *ita ut latera* C D, T R *vergant ad* G ; *ſed* D T, C R *perpendicularia ſint ad* B G ; *ſuſpendatur verò è jugo ad* E H ; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio* C D T R *ſic habenti ut nunc ponitur ; & quam quidem habet rationem* A B *ad* B E, *illam habeat trapezium* C D T R *ad ſpatium* L ; *quam verò rationem*

habet A B *ad* B H, *hanc habeat idem trapezium ad* M : *planè ſimiliter ac in præcedenti oſtendetur* Z *majus quidem quàm* L, *minus verò ipſo* M.

Demonſtratur prorſus ut proximè antecedens.

Prop. XIV.

Fig. 206. *Sit portio* B K G *comprehenſa ſub recta, & parabola ; ſit verò primùm* B G *ad rectos diametro, ducaturque à puncto* B *diametro parallela* B D ; *à* G *verò ipſa* G D *tangens parabolam in* G ; *enimverò erit* B G D *triangulum rectangulum ; dividatur autem* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, H I, *& à ſectionibus ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X ; *à punctis verò* (F, K, P, O) *ad quæ ipſa ſecant parabolam, conjungantur rectæ ad* G, *& producantur : dico triangulum* B G D *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trigoni* X I G *minus eſſe quàm triplum ; trapeziorum verò* Z F, H K, I F, *& trianguli* I O G *majus eſſe quàm triplum.*

Sit A B = B G, & ab A ſuſpendantur α, β, γ, δ, ε æquiponderan-
tia trapeziis D E, S Z, T H, V I, & trigono X I G, ſingula ſingulis,
a 2. *cor.* 7. *æ-* & [a] cuncta proinde cunctis ſimul. Eſt verò G B. (A B). B E[b] ::
quip. E S. E F[c] :: triang E S G. E F G. Item E S. E F[*] :: B D. B C[c] :: tri-
b *cor.* 5 *hujus.* ang B D G. B C G. [d]quare B D G. *B* C G :: E S G. E F G[e] :: B D G
c 1. 6. — E S G. B C G — E F G (hoc eſt) :: trap D E. C E ; [e] ergo trap
* *cor.* 4. 6. C E $\sqsubset \alpha$. Simili diſcurſu eſt A B. B Z :: trap S Z. L Z ; [f]ac inde
d 11. 5. trap L Z $\sqsubset \beta$, & A *B*. *B* H :: trap T H. M H ; [f] ideóque trap M H
e 19. 5. $\sqsubset \gamma$; item A B. B I :: trap V I. N I, atque idcirco trap N I $\sqsubset \delta$;
e 10. *hujus.* ac denique A B. B I :: triang X I G. O I G ; & proinde triang X I G
f 12. *hujus.* $\sqsubset \varepsilon$; quare junctim C E + L Z + M H + N I + X I G $\sqsubset \alpha$
g 8 *hujus.* $+ \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$. Porro quoniam trap S Z. F Z[h] :: S E. F E[b] :: A *B*.
h *ut priùs.* *B* E ; [f]erit trap F Z $\sqsupset \beta$, ſimiliterque trap K H $\sqsupset \gamma$, & trap P I $\sqsupset$
δ, & triang O I G $\sqsupset \varepsilon$; ac denique trap F Z + K H + P I +
k 6 *hujus.* O I G $\sqsupset \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$: cùm itaque [k] ſit $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon =$
$\frac{\text{triang } D\,B\,G}{3}$, liquet propoſitum.

Prop. XV.

Fig. 207. *Sit rurſus portio* B K G *comprehenſa ſub recta, & parabola, verùm* B G *non ſit diametro normalis ; eſt autem neceſſe vel illam quæ à puncto* B *diametro parallela ducitur ad eaſdem partes ſectioni, vel iſtam*

Digitized by Google

quæ à G, *obtuſum facere angulum ad* B G ; *obtuſum angulum faciat quæ ad B, & à B ducatur diametro parallela* B D ; *& à* G *ipſa* GD *parabolam contingens in* G, *& dividatur* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, A I, I G ; *& ab* E, Z, H, I *ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X, *& à punctis quibus hæ ſecant parabolam conjungantur rectæ ad* G, *& extendantur: enimverò & nunc dico triangulum* B D G *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trianguli* X I G *minus eſſe quàm triplum; ipſorum verò* Z F, H K, I P, *& trianguli* G O I *majus eſſe quàm triplum.*

Eadem prorſus eſt demonſtratio quæ præcedentis, niſi quòd hic pro 10 & 12 hujus, adhibentur 11 & 13. quorſum itaque ταυτολογεῖν.

Prop. XVI.

Sit rurſus portio B X G *comprehenſa ſub recta, & parabola; & per* B *quidem ducatur* B D *parallela diametro, à* G *verò ipſa* G D *tangens parabolam in* G, *ſit verò ſpatium* Z *tertia pars trigoni* B D G : *dico portionem* B K G *æquari ſpatio* Z. Fig. 208.

Si fieri poteſt, ſit primò Z ⊐ port B K G. Secetur tum B D in partes æquales B C, C Q, Q R, R Y, Y D, ita ut ſit triang B G Z ⊐ port B K G — Z ; unde erit Z ⊐ port B K G — triang B G Z. conjungantur G C, G Q, G R, G Y occurrentes parabolæ punctis F, K, P, O ; per quæ ducantur E S, Z T, H V, I X ad B D parallelæ. (Liquet verò ipſas B E, E Z, Z H, H I, I G etiam æquari ; * ob DC. C B :: S F. F E [a] :: G E. E B ; & D Q. Q B * :: T K. K Z [a] :: G Z. Z B &c.) * *cor.* 4. 6. a 4 *hujus.*

Quia verò B C = C Q, * erit E F = F L ; [b] unde trap F Z = trap F K ; item ob Zφ * = K M, [b] erit trap φ H = trap K P ; paritérque trap ψ I = trap P O, & triang I G X [b] = triang O G X, ergo triang B G C = trap B F + F K + K P + P O + triang O G K. ergo Z ($\frac{1}{3}$ triang B D G) ⊐ (port B K G — ; trap B F + F K + K P + triang O G X ⊐) trap F Z + K H + P I + triang O I G ; contra 14 vel 15 hujus. b 37. 1. & 2 *ax.* 1.

Sin dicatur Z ⊏ port B K G, ſit triang B G C ⊐ Z — port BKG ; unde portio B K G + triang B G C ⊐ Z, hoc eſt port B K G + trap B F + F K + K P + P O + triang O G X ⊐ $\frac{1}{3}$ triang B D G, ergo fortius erit trap C E + L Z + M H + N I + triang X I G ⊐ $\frac{1}{3}$ triang B D G ; itidem contra 14 aut 15 hujus.

Quin itaque potiùs erit Z = port B K G. *Q.E.D.*

Prop. XVII.

Fig. 209. *Hoc demonſtrato, liquet quod omnis portio* (A B C), *comprehenſa ſub recta, & parabola, ſeſquitertia eſt trianguli* (A B C) *habentis baſin eandem cum portione, & altitudinem æqualem.*

a 2 *hujus.* Ducatur tangens C F, cui occurrat diameter D B in E, eíque parallela A F; & ob D B [a]= B E, [b]erit triang D E C ([c]id eſt $\frac{1}{4}$ triang A F C) = 2 triang D B C [b]= triang A B C. atqui [d]eſt port A B C = $\frac{1}{3}$ triang A F C; ergo triang A B C port. A B C :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 4 :: 1. $1\frac{1}{3}$. *Q.E.D.*

b 1. 6.
c 20. 6.
d 16 *hujus.*

Hoc quod artificio quaſi mechanico ſic adſtruxerat, dehinc methodo prorſus Geometricâ demonſtratum exhibebit.

Definitiones

Portionum ſub recta & curva comprehenſarum

1. Baſin quidem appello rectam iſtam;
2. Altitudinem verò maximam perpendicularem à curva linea demiſſam in baſin portionis;
3. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

Prop. XVIII.

Fig. 210. *Si in portione* (A B C), *quæ continetur ſub recta & parabola, à media baſe ducatur recta* (D B) *diametro parallela; vertex erit portionis punctum* (B), *in quo ducta diametro parallela* (D B) *ſecat parabolam.*

a 1 *hujus.* Recta E F contingat parabolam in B, & demittatur B G ad A C perpendicularis; & quia E F eſt [a]parallela baſi A C, liquet B G eſſe maximam perpendicularem earum quæ à ſectione duci poſſunt in A C; & [b]proinde B fore verticem portionis A B C. *Q.E.D.*

b 2 *def. ad* 17. *hujus.*

Prop. XIX.

Fig 211. *Si in portionem* (A B C) *comprehenſam ſub recta & parabola ducantur duæ rectæ* (D B, F E) *parallelæ diametro, illa quidem* (D B) *à media baſe, hæc verò* (F E) *à media dimidia; erit ducta à media*

baſe (D B) *ducta à media dimidia* (F E) *ſeſquitertia longitudine.*

Nam ducatur (E G) parallela baſi A C; & quia B D. B G[a] :: a 3 *hujus.*
D Aq. G Eq[b] :: D Aq. D Fq[c] :: 4. 1, erit[d] convertendo B D. G D b 34. 1.
([b]E F) :: 4. 3 :: $1\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.* c 20 *hujus.*
d *cor.* 19. 5.

Cor. B D. B G :: 4. 1.

Prop. XX.

Si portioni (A B C) *compeehenſa ſub recta & parabola inſcribatur triangulum* (A B C) *eandem baſin habens cum portione, eandemque altitudinem, majus erit inſcriptum* (A B C) *quàm dimidium portionis.* Fig. 212.

Per verticem B ducatur tangens E F ([a]quæ baſi eſt parallela), cui a 1 *hujus.*
occurant A E, C F diametro parallelæ; liquétque pgr A E F C[b] (hoc b 41. 1.
eſt 2 triang A B C) majus eſſe portione A B C.

Coroll. Hinc, liquet, quòd huic portioni poſſibile eſt polygonum inſcribere, ita ut relictæ portiones minores ſint omni propoſito ſpatio.

Nam ſi portionibus A G B, C H B inſcribantur triangula, [a]hæc a 20 *hujus.*
auferent pluſquam ſemiſſes portionum A H B, C H B; & ſi in reliquis id fiat, idem continget. [b]quare tandem ad reliquias dato ſpatio b 1. 10.
minores perveniatur neceſſe eſt.

Prop. XXI.

Si portioni (A B C) *comprehenſa ſub recta & parabola inſcribatur triangulum* (A B C) *eandem baſin habens cum portione, eandemque altitudinem; inſcribantur verò & alia triangula* (A H B, C F B) *relictis portionibus* (A H B, C F B), *eaſdem baſes habentia cum portionibus, eandemque altitudioem; ſingulorum triangulorum* (A H B, C F B) *relictis portionibus inſcriptorum octuplum eſt triangulum* (A B C) *toti portioni inſcriptum.* Fig. 213.

Nam quia G I. D B[a] :: A I. A B[b] :: 2. 4; & D B. G H[c] :: 4. 3; a 4. 6.
erit ex æquo G I. G H :: 2. 3; adeóque G I = 2 I H; [d]quare tri- b *conſt.*
ang I A G = 2 triang H A I; ideóque triang B A D[e] (4 I A G) c 19. *hujus.*
= 8 triang I A H. [f]quare triang A B C (2 B A D) = 8 triang d 1. 6.
A H B. *Q.E.D.* e 20. 6.
f 15. 5.

Coroll. Triang A H B + C F B = $\frac{3}{4}$ triang A B C.

Prop. XXII.

Fig. 214. *Si ſit portio* (ABC) *comprehenſa ſub recta & parabola, & ſpatia ponantur quotcunque* (X, Y, Z) *deinceps in quadrupla ratione; ſit verò ſpatiorum maximum* (X) *æquale triangulo* (ABC) *baſin habenti eandem cum portione, & altitudinem eandem; ſimul omnia ſpatia minora erunt portione* (ABC).

Portionibus AHB, CFB inſcribantur trigona AHB, CFB
portionibus iſtis æquè alta; & altera pari modo reliquis portionibus APH, COF; HMB, FNB; conſtátque fore triang AHB
a cor. 21 huj. + CFB[a] $= \frac{1}{4}$ triang ABC[b] $= \frac{1}{4}$ X =[b] Y; item pariter fore
b hyp. triang APH + HMB[a] $= \frac{1}{4}$ AHB; & triang COF + FNB
c 12. 5. [a]$= \frac{1}{4}$ CFB; [c]adeóque triang APH + HMB + COF + FNB
d 15. 5. $= \frac{1}{4}$ AHB + $\frac{1}{4}$ CFB[d] $= \frac{1}{4}$ Y[b] = Z: ergo quum iſta trigona
ſimul omnia deficiant à portione ABC, erunt ſimul X, Y, Z eadem minora.

Prop. XXIII.

D. C. B. A.
64. 15. 4. 1. *Si componantur magnitudines* (D, C, B, A) *deinceps in quadrupla ratione; omnes magnitudines, inſuperque minimæ* (A) *pars tertia eidem ſummæ adjecta, erunt ſeſquitertia maximæ* (D).

a hyp. Nam quia D[a] = 4C, erit $\frac{1}{3}$D $= \frac{4}{3}$C $=$ C $+ \frac{1}{3}$C; ſimilitérque $\frac{1}{3}$C $=$ B $+ \frac{1}{3}$B; & $\frac{1}{3}$B $=$ A $+ \frac{1}{3}$A; eſt ergo $\frac{1}{3}$D $=$ C + B $+ \frac{1}{3}$B $=$ C + B + A $+ \frac{1}{3}$A; quare D + C + B + A $+ \frac{1}{3}$A. D :: $1 + \frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc, figura portioni inſcripta (juxta 22 hujus) minor eſt quàm $\frac{4}{3}$ trigoni ABC.

Fit enim (ibidem) è magnitudinibus X, Y, Z ÷ in ratione 4 ad 1, quarum maxima X æquatur triangulo ABC.

Scholium.

Liquidiùs id deducatur ex hac univerſali propoſitione.

Sint quotcunque quanta proportionaliter decreſcentia in ratione α ad β; eorum ſit extremum ω, & ſumma dicatur Z; erit Z $= \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$.

Nam ut primum ad ſecundum, * ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt $\alpha . \beta :: Z - \omega . Z - \alpha$; quare (extrema & media in ſe ducendo) eſt $\alpha Z - \alpha\alpha = \beta Z - \beta\omega$; & (tranſponendo) $\alpha Z - \beta Z = \alpha\alpha - \beta\omega$; & (dividendo utrinque per $\alpha - \beta$) eſt $Z = \dfrac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$. * 12. 5.

Hinc ſi $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \dfrac{4\alpha - \omega}{\alpha}$; ut in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quòd ſi progreſſio continuetur ad infinitum, ſcilicet ut ω ſit $= 0$ nihil; tunc evaneſcente termino $\beta\omega$, liquet fore $Z = \dfrac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta}$.

Hinc ſi $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \frac{4}{3}\alpha$.

Hinc autem breviſſimè conſtat *Archimidea* quadratura; unáque plures innumeræ ſimiliter eliciuntur.

Prop. XXIV.

Omnis portio (A B C) *comprehenſa ſub recta & parabola, ſeſquitertia eſt trianguli* (A B C) *eandem baſin habentis cum ipſa, & altitudinem æqualem.* Fig. 214.

Sit $Z = \frac{4}{3}$ triang A B C; &, ſi fieri poteſt, ſit primò port A B C $\sqsubset$ Z: [a] inſcribatur portioni figura A P H M B N F O C trigonis conſtans, (ut in præcedentibus) ac ita ut ſit port A B C — fig A P H M B N F O C $\sqsupset$ port A B C — Z; eſt ergo Z $\sqsupset$ fig A P H M B N F O C; [b] hæc autem figura minor eſt quàm $\frac{4}{3}$ triang A B C; ergo magis Z $\sqsupset$ $\frac{4}{3}$ triang A B C, contra hypotheſin. a cor. 20 huj. b cor. 23 huj.

Sit jam port A B C $\sqsupset$ Z; & concipiatur ſeries magnitudinum (quarum ſumma vocetur S) progrediens in quadrupla ratione, (incipiens utique à triangulo A B C, & decreſcens in ω) [c] ita ut ſit $\omega \sqsupset Z -$ port A B C: cùm igitur ſit $S + \dfrac{\omega}{3}$ [d] $= Z$; erit $\omega \sqsupset S + \dfrac{\omega}{3} -$ port A B C; unde liquebit eſſe portionem A B C $\sqsupset$ S. [e] Quod eſt abſurdum. c cor. 20. huj. d 23 bujus. e 22 huj.

Quare potiùs eſt port A B C $= Z = \frac{4}{3}$ triang A B C.

Coroll.

Hinc

a 41. 1. 1. Si ductâ F G per B ad A C parallelâ compleatur parallelo-
b 24 *hujus.* grammum A G; erit pgr. A G. port. A B C :: 3. 2. Nam pgr
A G. triang A B C [a]:: 6. 3; & triang A B C. port A B C [b]:: 3. 4.
quare ex æquo pgr A G. port A B C :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Complementum A Y B F eſt $\frac{1}{2}$ ſemiportionis A B D.

3. Hinc facilè efficitur quadratum æquale portioni. Nam producatur D B in E, ut ſit B E = $\frac{1}{3}$ B D; vel E D = $\frac{4}{3}$ B D; & connectantur E A, E C; liquet trigonum A E C æquari portioni ABC;
*14. 2. unde ſi *fiat trigono A E C æquale quadratum, liquet factum eſſe.

4. Itaque facilè ad datam rectam applicatur parabolica portio ad illam ſcilicet applicato triangulo A E C.

DE

De ÆQUIPONDERANTIBUS,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

SI duo ſint ſpatia (AB, CD) *contenta ſub recta, & parabola, *quam poſſumus ad datam rectam applicare; ex utroque ipſorum compoſiti magnitudinis centrum gravitatis* (H) *erit in rectâ connectente ipſorum centra gravitatis* (E, F), *dividens dictam rectam* (E, F), *ut ipſius partes* (EH, FH) *reciprocè eandem rationem habeant cum ſpatiis* (AB, CD).

Fig. 216.
* *cor. 24. de qu. parab.*

Accipe FG, FK pares ipſi EH (unde EG = FH), & fiat EL = EG (FH). ad GL applicentur pgr[a] GO, GP [b]utrumvis æquale dimidio AB, & productis OR, PQ compleatur pgr QM. Eſtque parab CD. parab AB [c]:: EH. FH [d]:: 2EH ([e] 2GF). 2FH (2EG) [e]:: GK. GL [f]:: QN. QP [g]:: pgr QM. QO [e](parab AB) [h] unde parab CD = pgr QM. Cùm igitur [k]ſit E centrum pgr^i QO, & F centrum pgr^i QM ([e]ob EG = EL, & FG = FK) ſitque QM. QO :: EH. FH; liquet propoſitum.

a 3. *ax.* 1.
b *cor. 24. de qu. parab.*
c 6 & 7. 1 *de æquip.*
d 15. 5.
e *conſt.*
f 34. 1.
g 1. 6.
h 14. 5.
k 9, 1 *de æquip.*

Manifeſtum,

Si portioni (ABC) *ſub recta, & parabola contentum, inſcribatur triangulum* (ABC), *eandem baſim habens cum portione, & æqualem altitudinem; & rurſus reliquis portionibus inſcribantur triangula* (AEB, CFB) *eaſdem baſes habentia cum portionibus, & æqualem altitudinem; & ſemper reliquis portionibus triangula inſcribantur eodem modo* (AME, ESB, CNF, FTB &c); *orta figura* (AMESBTFNC) *portioni evidenter* inſcribi dicatur. Liquet verò, quòd ſic inſcriptæ figuræ angulos connectentes* (ST, EF, MN), *quæque proximè ſunt à vertice portionis* (B), *quæque deinceps parallelæ erunt portionis baſi* (AC), *& biſecabuntur à portionis diametro* (BD); *& diametros ſecabunt in rationes numerorum deinceps imparium, uno dicto illâ* (BY) *quæ ad verticem portionis.*

Fig. 217.
**Notabiliter γνωρίμως.*

Hoc demonſtrandum eſt in *Ordinibus.

* *Librum innuit, cui inſcriptum τάξεις,* (Ordines *vel* Series), *de quo nihil admodum conſtat.*

a 1. *de qu. par.*
b 4. 6.
c 15. 5. & 7. 5.
d 11. 5.
e 14. 5.
f 4 *de qu. par.*
g 2 *ax.* 1.
h 33. 1.
k *cor.* 19. *de quad. parab.*

Nam (ductis M P, E H, N R, F L diametro parallelis) erit A G = G B; & [b] ideo A H = H L; [a] ſimilitérque A I = I E, ac [b] ideo A P = P H; & ſic porro A D in partes æquales dividetur, & pariter C D in totidem æquales; [c] unde A P = CR. Cùm igitur ſit AP. PO [b] :: AD. DB [b] :: CD. DB :: CR. RQ [d] :: AP. PO. [e] Erit RQ = PO. item P O. OM [f] :: D C. D P [c] :: A D. D R [f] :: R Q. Q N [d] :: P O. O M, [e] quare Q N = O M, [g] itaque R N = P M, [h] & M N ipſi A C parallela eſt. Simili diſcurſu E F, & S T ipſi A C parallelæ oſtendentur; [a] unde M V = V N, & E X = X F &c. Denique B D. B X [k] :: 4. 1. Et ſimili modo, B X. B Y :: 4. 1; unde ſi B Y ponatur 1, erit Y X = 3. (B X = 4, B D = 16, X D vel E H = 12) item H G. D B ([b] A H. A D) :: 8. 16. unde E G = 4: ducatur M Z ad A B parallela, & ob E G. E Z [k] :: 4. 1; erit Z G (M O) = 3, & OP ($\frac{1}{2}$ H G) = 4, ergo M P (V D) = 7, & proinde X V (X D — VD) = 5. Ex quibus conſtat de omnibus. *Q. E. D.*

Coroll. 1. E G = F K. unde
2. G K prrallela ad E F.
3. E G = B X = $\frac{1}{4}$ B D.

Prop. 11.

Fig. 218. *Si verò portioni* (A B C) *comprehenſa ſub recta, & rectanguli coni ſectione rectilineum* (A M E S B T F N C) *evidenter inſcribatur, inſcripti centrum gravitatis erit in portionis diametro* (BD).

a *lemm. præc.*
b 15, & 13. 1 *de æquip.*
c 7 *cor.* 7. 1 *de æquip.*

Nam connectantur anguli rectis M N, E F, S T, [a] hæ parallelæ ſunt baſi A C, & biſecantur à diametro B D; [b] quare trapeziorum A N, M F, E T, & trigoni S B T ſingula centra gravitatis ſunt in diametro B D. [c] ergo & compoſiti ex his centrum gr. eſt in eadem. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 219. 220. Sint trapezia D E, *de*, & M G, *mg*, in quibus D M. M N :: *dm. mn.* & D A. M E :: *da. me.* Atque M E. N G :: *me. ng.* erit trap. D E. M G :: trap *de. mg.*

Producantùr A E P, E G O, *aep*, *ego*, ut occurrant ipſis DN, *dn.*

Eſtque P D. P M [a]:: D A. M E [b]:: *da. me* [a]:: *pd. pm* [c]:: P D. P M. a 4. 6.
ergo dividendo P M. M D :: *pm.md..* [b] item M D. M N :: *md. mn.* b hyp.
ergo ex æquo P M. M N :: *pm. mn* ; item ob M E. N G [b] :: *me. ng* ; c 11. 5.
[a] erit M N. M O :: *mn. mo.* ergo rurſus ex æquo P M. O M :: *pm.*
om ; [d] hoc eſt triang P M E. O M E :: triang *pme. ome.* item triang d 1. 6.
O M E. O N G [e] = M E. N G, bis [b] = *me. ng*, bis [e] = triang *ome.* e 20. 6.
ong ; ergo permutando triang O M E. *ome* :: triang O N G. *ong* [f]:: f 19. 5.
trap M G. *mg* ; & rurſus permutando triang O M E. trap M G ::
triang *ome.* trap *mg* ; ergo ex æquali triang P M E. trap M G ::
triang *pme.* trap *mg* ; quinimò ſimiliter trap D E. triang P M E ::
trap *de.* triang *pme* ; ergo denuo ex æquo trap D E. M G :: trap *de.*
mg. *Q.E.D.*

Coroll. Trap D E. triang O M E [*]:: trap. *de.* triang *ome.* * 22. 5.

Lemma 2.

Si A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Erit B. C :: E. F. & A. B + C Fig. 221.
:: D. E + F.

Nam permutando B. E (A. D) :: C. F. & rurſus permutando B. C
E. F. Item B + C. E + F [a]:: (B. E ::) A. D. ergo permutando a 12. 5.
A. B + C :: D. E + F.

Quòd ſi ſit A. B + C :: D. C + F ; & A. B :: D. E. erit B. C ::
E. F. & A. C :: D. F. Item ſi fuerit B. C :: E. F. & A. B + C ::
D. E + F. Erit A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Quæ ex ſimili rationum permutatione, inverſione &c. facilè eliciuntur.

Prop. III.

Si duarum portionum [*]*ſimilium* (A B C, *abc*) *ſub recta, & parabo-* Fig. 222.
la comprehenſarum, utrique rectilineum inſcribatur evidenter ; habe- 223.
ant verò inſcripta rectilinea latera mutuò æqualia multitudine, centra * Not.
gravitatum (Y, *y*) *ſimiliter ſecant diametros portionum* (B D, *bd*).

Angulos connectant rectæ E F, G H, K L, *ef*, *gh*, *kl* ; ſintque Q,
R centra trapeziorum A F, E H, & S compoſiti ex illis A H ; & ſimiliter *q*, *r*, *s* ſint centra ipſorum *af*, *eh*, *ah* : item ſit X centrum compoſiti ex trapezio G L, & trigono K B L, & *x* ipſius *gl* + triang *kbl.* a 3 de qu par.
Jam ob A Dq. E Mq [a]:: B D. B M [b] :: *bd. bm* :: *adq. emq* ; erit A D. b hyp. & manif. hujus.
E M ([c] A C. E F) :: *ad. em* ([c] *ac. ef*). [d] ergo 2 A C + E F. 2 E F + c 15. 5.
A C :: 2 *ac* + *ef.* 2 *ef* + *ac.* hoc eſt M Q. Q D :: *mq. qd* ; ergo d 15. & 18. 5.

Digitized by Google

e 15.1.æquip. componendo M D. Q D :: *md. qd.* item B D. M D :: *bd. md.* itaque
f 12. 5. ex æquo B D, Q D :: *bd. qd*; paritérque B D. Mq :: *bd mq.* Simili
g 6 & 7 1 æquip. diſcurſu B D. R M :: *bd. rm*; [f]quare B D. R Q :: *bd. rq.* Item R S.
h 1. lem. 2 huj. S Q [g]:: trap A F. E H [h]:: trap *af. eh* :: *rs. sq.* ergo ex æquo B D. S Q
k 2 lem. 2 huj. :: *bd sq*; & [k] proinde BD. S D :: *bd. sd.* Simili diſcurſu B D. B X
l cor. 1 lem. 2 hujus. :: *bd bx*; & proinde B D. X S :: *bd. xs.* Quia verò trap A F. E H
[h]:: *af. eh.* erit componendo A H. E H :: *ab. eh.* Item trap E H. G L
[h]:: *ah. gl.* & trap G L. triang K B L [l]:: *gl. kbl.* ergo ex æquo A H.
G L :: *ah. gl.* & A H . K B L :: *ab. kbl.* & [f] idcirco A H . G L +
K B L [g](X Y. YS) :: *ah gl + kbl.* ([g]*xy . ys*). & cùm priùs fuerit
B D. X S :: *bd. xs*; [k]erit B D. X Y :: *bd. xy*; [k] ideóque etiam B D.
B Y :: *bd. by*; & B D. Y D :: *bd. yd.* ac denique dividendo B Y. Y D
:: *by. yd.* *Q.E D.*

Not. Portionum ſimilitudinem intelligit hic Author, non ſtrictiſſimam, at latiore ſenſu, juxta quem omnia triangula, & omnes figuræ Analogicæ (in quibus nempe ſi diametri à vertice proportionaliter dividantur, per diviſiones ductæ ordinatæ proportionales fiunt:) ſibimet aſſimilari dicantur; unde quævis duo parabolica ſegmenta ſimilia eſſe ſupponit hic diſcurſus; id quod probè, quò ſcrupuli tollantur, animadverſum oportet.

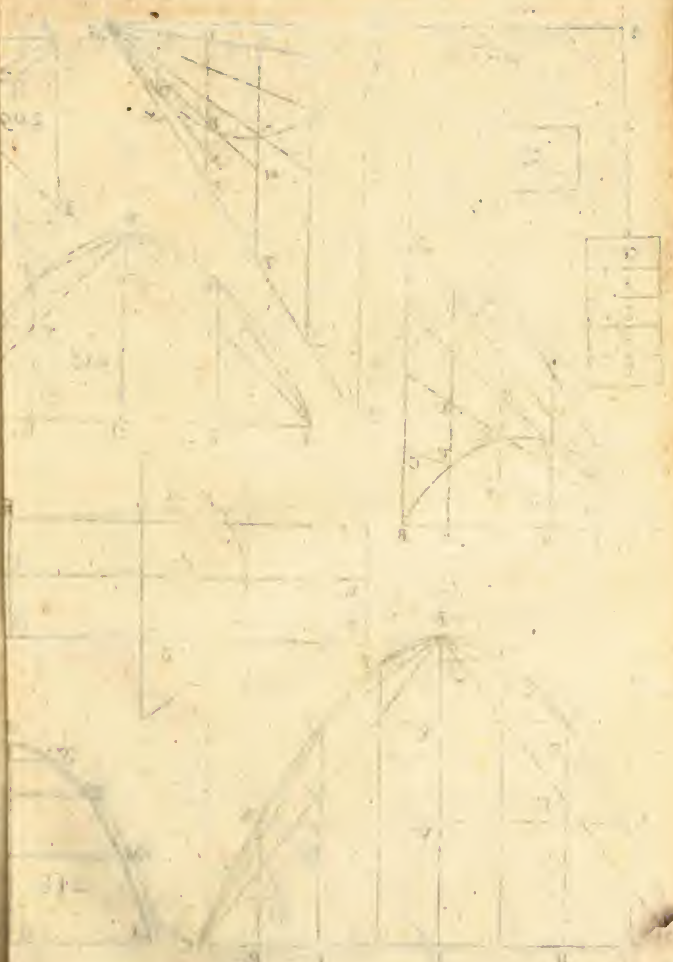
Prop. IV.

Fig. 224. *Omnis portionis* (A B C) *comprehenſa ſub recta, & parabola, centrum gravitatis eſt in portionis diametro* (B D).

Si neges, eſto E centrum portionis extra B D; ducatur E F ad B D
a 1. 6. parallela; ſitque C F. F D :: C A. G A [a]:: triang CBA . triang GBA.
b cor. 20. de quad. parab. [b]tum portioni inſcribatur figura evidens (quæ vocetur X), ita ut port
A B C—X $\sqsupset$ triang G B A. Inſcriptæ autem figuræ centrum [c] ſit
c 2 hujus. H, & connexæ H E occurrat C K ad B D parallela. Eſtque X port
d 8. 5. A B C—X [d] $\sqsubset$ triang A B C . port A B C—X [d] $\sqsubset$ triang A B C.
e priùs. A B G ([e]:: C F. D E :: K E. H E.) Sit M E . H E :: X. port A B C
f 10. 5. —X; quare M E. H E $\sqsubset$ K E. H E; & [f] ideo M E $\sqsubset$ K E, &
g 8. 1. de æqu. M [g]centrum reliquarum portionum erit extra ſectionem. *Q.E.A.*
h 9 poſt. 1. æqu.

Coroll. Hinc ſi ex tota portione auferatur trigonum A B C, [g]centrum reliquarum portionum eſt in B D, & ſic porro, ablatis aliis trigonis figuræ inſcriptæ.

Lemma.



Digitized by Google

Lemma.

Si $LR.RP \sqsubset LS.SP$ erit $LR \sqsubset LS$.

Nam componendo $LP.RP \sqsubset LP.SP$. [a]ergo $RP \sqsupset SP$. & proinde $LR \sqsubset LS$.

Inversè, ſi $LR \sqsubset LS$. erit $LR.RP \sqsubset LS.SP$.

Nam $LR.RP$ [b]$\sqsubset LS.RP$ [b]$\sqsubset LS.SP$.

a 10.5.
b 8.5.

Prop. V.

Si portioni (ABC) *comprehenſæ ſub recta, & parabola, inſcribatur rectilineum* (A E B F C) *evidenter, totius portionis centrum gravitatis* (S) *propius eſt vertici portionis* (B), *quàm inſcripti rectilinei centrum* (R). Fig. 225.

Sit P centrum trigoni A B C, & reliquarum portionum A E B, C F B centra ſint M, N; trigonorum verò A E B; C F B centra ſint I, K, & connectantur M N, I K, G H; liquet O eſſe centrum port $AEB + CFB$. (quia hoc eſt in utraque [a]M N, [b]B D), & L eſſe centrum triang $AEB + CFB$; & quia $AG = \frac{1}{2}AB$, & $CH = \frac{1}{2}CB$, [c]erit $DQ = \frac{1}{2}DB$; & DP ([d]$\frac{1}{3}DB$) $\sqsupset DO$; unde $DP \sqsupset DS$ (nam S[a]cadit inter O, P). Simili diſcurſu $IG \sqsupset MG$; quare $LP \sqsupset OP$: cùm itaque ſit $LR.RP$ [e]:: triang ABC. triang $AEB + CFB$. [f]$\sqsubset$ triang ABC. port $AEB + CFB$ [e]:: $OS.SP$ [f]$\sqsubset LS.SP$. [g]erit $LR \sqsubset LS$; quare S eſt propius vertici B. *Q.E.D.*

a 6 cor 7. 1. de *æquip.*
b *cor.4. hujus.*
c 2. 6.
d 3 *cor.14.1 de æquip.*
e 6 & 7. 1 *de æquip.*
f 8. 5.
g *lemm præc.*

Coroll. Similiter, quò figura inſcripta plura habet latera, eò centrum ejus propiùs ad verticem accedet.

Prop. VI.

Datâ portione (ABC) *comprehenſa ſub recta, & parabola, poſſibile eſt portioni rectilineum* (A E B F H) *evidenter inſcribere, ita ut recta* (SR), *quæ eſt inter centra gravitatum portionis, & inſcripti rectilinei minor ſit quâcunque rectâ propoſitâ* (Z). Fig. 226.

Sit $BS.Z$ :: triang $ABC.X$; & [a]inſcribatur figura (A E B F C) evidenter (cujus centrum R), ita ut port ABC — fig $AEBFC \sqsupset X$. Dico factum.

a *cor. 20 de qu. par.*

Si fieri poteſt, ſit $SR \left.\begin{matrix}\sqsubset\\=\end{matrix}\right\} Z$. éſtque port ABC. port ABC —

b 8. 5. c hyp. fig A E F B C [b] ⊏ triang A B C. X [c] :: B S. Z. $\left.\begin{matrix}\sqsubset\\=\end{matrix}\right\}$ B S. S R. itaque ſi ponatur port A B C. port A B C — fig A E B F C :: T S. S R, erit
d 8. 1 de aqu. T S ⊏ B S; & T [d] centrum portionum reliquarum demptâ figurâ A E B F C erit extra B D, contra coroll. 4 hujus.

Breviùs. Quo figura inſcripta plura habet latera, eò propiùs accedet ad verticem; proinde ad centrum ferè accedet, ex continuo laterum augmento.

Prop. VII.

Fig. 227. Fig. 228. *Duarum ſimilium portionum* (A B C, M N O) *comprehenſarum ſub recta, & parabola, centra gravitatum* (E, Q) *in eâdem ratione ſecent diametros* (B D, N P).

Si negas, eſto B H. H D :: N Q. Q P (ita nempe primò ut H cadat infra E). Portioni A B C [a] inſcribatur figura A F B G C, cujus
a 6. hujus. centrum G, ita ut E G ⊐ E H; & huic *ſimilis figura inſcribatur
* Not. portioni M N O, cujus centrum ſit T: & ob N Q. Q P ([b] :: B H. H D)
b hyp. [c] ⊏ (B G. G D [d] ::) N T. T P; [c] erit N Q ⊏ N T, contra 5 hujus.
c lemm ad 4 b. Quòd ſi dicas eſſe B K. K D :: N Q. Q P; & K cadere ſupra E;
d 3 hujus. fiat NX. XP :: BE. ED [c] ⊏ *B*K KD :: NQ. QP. [c] ergo NX ⊏ N Q; ſic relabimur in primam hypotheſin, quam abſurdam demonſtravimus.

Aliter breviùs. Cùm centra ſimilium figurarum inſcriptarum, ſi laterum numerus augeatur infinitè, in centra portionum deſinant, & illarum centra proportionaliter dividant diametros, harum centra idem efficient.

* *Not.* Similes dicuntur inſcriptæ ſegmentis figuræ, non juxta ſtrictam illam, quæ initio ſexti elementi definitur, ſimilitudinem, ſed propter ſimilem inſcribendi modum, qualis in appoſito ad primam hujus manifeſto, & in 21ª *de quadr. parab.* deſcribitur; quæ certè ſimilitudo huic fundando ratiocinio ſufficit. vid *Not.* ad 3 hujus.

Prop. VIII.

Fig. 229. *Cujuſcunque portionis* (A B C) *ſub recta, & parabola contentæ centrum gravitatis* (H) *dividit portionis diametrum* (B D), *ita ut pars ejus* (B H), *quæ ad verticem, ſeſquialtera ſit partis* (H D) *quæ ad baſim.*

Portioni inſcribatur figura evidens A K B L C, & portionum A K B, C L B centra ſint M, N; ac E centrum trigoni A B C; ducantur

cantur K L, M N, F G, ſitque S X $= \frac{1}{3}$ B S $= \frac{1}{12}$ B D (ob B S$^{a} = \frac{1}{4}$ B D). unde B X (B S $+$ S X) $= \frac{1}{4}$ B D $+ \frac{1}{12}$ B D $= \frac{1}{3}$ B D. Item E D$^{b} = \frac{1}{3}$ B D; ergo X E $= \frac{1}{3}$ B D. Porro ob B D $= 4$KF ^{c}erit B H $=$ (4K M $=$) 4S Q; ergo (ſublatâ S Q) eſt B S $+$ Q H $=$ 3 S Q $=$ 3S X (B S) $+$ 3X Q; ergo Q H $=$ 3X Q. atqui 3. 1 ^{e}:: triang A B C. port A K E $+$ C L B ^{f}:: Q H. H E. ^{g}ergo X Q $=$ H E; unde X E (B X, vel D E) $=$ 5H E; & X H $=$ 4H E, & H D $=$ 6H E. Liquet igitur fore B H. H D :: 9. 6 :: 3. 2. *Q.E.D.*

a *manif. hujus.*
b 3 *cor.* 14 *huj.*
c 7 *hujus.*
d *conſt.*
e 24. *de qu. par.*
f 6, & 7. 1 *æqu.*
g 9. 5.

Coroll.
$$\left.\begin{array}{l|l} BD. & HD :: 15.\ 6 :: 5.\ 2. \\ BD. & BH :: 15.\ 9 :: 5.\ 3. \\ BD. & HE :: 15.\ 1. \end{array}\right\}$$

Lemma.

Quotlibet AB, CB, DB, EB ÷; erunt exceſſus A C, C D, DE etiam ÷ in eadem ratione. Nam ob A B. C B :: C B. D B, erit diviſim A C. C B :: C D. D B; & permutatim A C. C D :: C B. D B; item ob C B. D B :: D B. E B; erit diviſim C D. D B :: DE. E B; permutandóque C D. D E :: D B. E B :: C B. D B. unde liquet fore A C, C D, D E ÷ in ratione C B ad D B, vel A B ad C B.

Coroll. A D. D E :: A B $+$ C B. D B :: C B $+$ D B. E B, &c. 12, 16, 18, 5.

Prop. IX.

Fig. 230.

Si quatuor lineæ (A B, C B, D B, E B) *proportionales ſint in continua proportione; & quam rationem habet minima ad exceſſum, quo maxima excedit minimam, hanc habens ſumatur aliqua ad tres quintas exceſſus, quo maxima proportionalium excedit tertiam; quam verò habet rationem æqualis duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ ſecundæ, & ſextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ ſecundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, hanc habens accipiatur quædam ad exceſſum, quo maxima proportionalium excedit tertiam; ſimul ambæ ſumptæ erunt duæ quintæ ipſius maximæ.*

Sit E B. A E :: F G. $\frac{3}{5}$ A D; item 2A B $+$ 4C B $+$ 6D B $+$ 3E B. 5A B $+$ C B $+$ 10D B $+$ 5E B :: G H. A D; dico fore A B. F H :: 5. 2.

Nominentur L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB.
M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB.
Q = 2AB + 4CB + 2DB.
R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB.
S = 2DB + EB.
T = CB + 3DB + 2EB.
V = 2AB + 3CB + DB.
X = AC + 3CD + 2DE.

Ob AB + CB. DB [a]:: AD. DE; [b]erit 2AB + 2CB. 2DB :: (AD. DE [a]::) CB + DB. EB. [c]quare V. S :: AD. DE: fiat AD. DO :: R. S; quare inversè componendo erit AO. AD :: R + S. R; (hoc eſt L. R); item AD. GH :: M. L; ergo ex æquo perturbatè eſt AO. GH :: M. R [b]:: 5. 2. Porro, ob DO. AD :: S. R; & AD. DE [d]:: V. S; erit rurſus ex æquo perturbatè DO. DE :: V. R; quare inversè convertendo T (R—V). R :: OE. DE; item AC. CB [e]:: DE. EB [e]:: CD. DB [e]:: 3CD. 3DB [e]:: 2DE. EB; [e]adeóque X. T :: DE. EB; ergo iterum ex æquo perturbatè OE. EB :: X. R; componendóque OB. EB :: X + R. R; [e]item AC + CD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB :: AB + 2CB + DB. DB + EB; ergo inversè componendo AE. AD :: AB + 2CB + 2DB + EB. AB + 2CB + DB [e]:: R. Q. [f]ergo R. $\frac{2}{5}$Q :: AE. $\frac{2}{5}$AD [g]:: EB. FG; erat verò prius X + R. R :: OB. EB; ergo ex æquo OB. FG :: X + R. $\frac{2}{5}$Q (hoc eſt :: 3AB + 3DB + 6CB. $\frac{2}{5}$: 2AB + 2DB + 4CB) [b]:: 5. 2: atqui fuit AO. GH :: 5. 2; quare [e]junctim AB. FG :: 5. 2. *Q.E.D.*

a *cor. lemm. præc.*
b 15. 5.
c 12. 5.
d *priùs.*
e *cor. præc.*
f 16, & 15. 5.
g *hyp.*

Hæc concluſio ſic operosè monſtrata, poterit ita per operationes Algebraicas expeditiùs & liquidiùs oſtendi.

Sicut $a, b, c, d \div\!\cdot\!\cdot$; & $d . a - d :: y . \frac{3a - 3c}{5}$ (quare $y = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$); & $2a + 4b + 6c + 3d . 5a + 10b + 10c + 5d :: z . a - c$ (quare $z = \frac{2aa + 4ab + 4ac + 3ad - 4bc - 6cc - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}$).

Eſt ergo (ſummas iſtas conjungendo, fractionéſque, quibus conſtant, ad eandem denominationem redigendo) $y + z =$

10aaa

$$\frac{10aaa + 20aab + 20aac + {}^{*}20aad + 10abd - 20abc\ ({}^{*}-20aad) - 30acc\ (-20abd) - 20acd - 10bcd\ {}^{*}(10add)}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd}$$

* ob $bc = ad$.
* ob $cc = bd$.

$= \frac{10aaa + 20aab + 20aac - 20abd - 20acd - 10add}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd} = \frac{2}{5}a$. (quod patebit hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & dividendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque conſtat.

Lemma.

In parabolâ A B C, ſint A C, D E ordinatim applicatæ ad diametrum B F; erunt portiones A B C, D B E inter ſe, ut cubi ſemibaſium F A, G D.

Fig. 231.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; eſt port A B C. D B E [a]:: triang A B C. D B E [b]:: triang B F A. triang B G D [c]= F A. G D + B F. B G = F A. G D + [d]F Aq. G Dq [e]= F A cub. G D cub. *Q. E. D.*

a 24 *de quad. par.* & 15. 5.
b 15. 5.
c 23. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 5. *def.* 6.

Prop. X.

Omnis fruſti (A D E C) *à parabolico ſegmento ablati centrum gravitatis eſt in recta* (G F), *quæ diameter eſt fruſti, hoc modo poſitum, æquiſectâ rectâ* (G F) *in quinque partes* (G L, L H, H K, K P, P F) *in media quinta parte* (H K); *ut ejus particula propior minori baſi fruſti ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet ſolidum, baſin quidem habens quadratum quod ex majore baſium fruſti, altitudinem verò æqualem utrique ſimul & duplæ minoris baſis & majori, ad ſolidum, baſin quidem habens quadratum minoris baſis fruſti, altitudinem verò æqualem utrique & duplæ majoris baſis & minori ipſarum.*

Fig. 231.

Dico ſi fuerit H I. I K :: 2 D E + A C × A Cq. 2 A C + D E × D Eq; foré punctum I centrum gr. fruſti A D E C.

Sint F B, Y B, G B, Z B ÷÷; & [b]fiat F H. I R :: F Z. Z B; éſtque F Bq. Y Bq [c]:: F B. G B [d]:: A Fq. D Gq; unde F B. Y B :: A F. D G. item F B cub. Y B cub [e](F B. Z B) :: A F cub. D G cub; [f]:: port A B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B ([g]id eſt F H. I R) :: fruſt A D E C. D B E. Porro, D E. A C [h](D G. A F) [k]:: Y B. F B. [l]quare D E. A F :: Y B. ½ F B; & componendo D E + A F. A F :: Y B + ½ F B. ½ F B. & D E + A F. A C. [m](hoc eſt, D E + A F × A Cq. A C cub) [l]Y B + ½ F B. F B. Item A C cub: D E cub [n]::

a 13, & 11. 6.
b 12. 6.
c 20. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 33. 11.
f *lemm præc.*
g *conſt.*
h 15. 5.
k *priùs.*
l 16, & 15. 5.
m 32. 11.
n *priùs, et* 15. 5

FB. ZB; dein DE. AC [o] (YB. FB) [d] :: ZB. GB; ergo DG. AC :: $\frac{1}{2}$ ZB. GB; componendóque DG. AC + DG :: $\frac{1}{2}$ ZB. GB + $\frac{1}{2}$ ZB; [l] unde DE. AC + DG [m] (DE cub. AC + DG × DEq) :: ZB. GB + $\frac{1}{2}$ ZB: quapropter ex æquo erit DE + AF × ACq. AC + DG × DEq [h] (hoc eſt 2DE + AC × ACq. 2AC + DE × DEq; ([g] hoc eſt HI. IK) :: YB + $\frac{1}{2}$ FB. GB + $\frac{1}{2}$ ZB; & componendo HK. IK :: YB + $\frac{1}{2}$ FB + GB + $\frac{1}{2}$ ZB. GB + $\frac{1}{2}$ ZB [h] :: 2YB + FB + 2GB + ZB. 2GB + ZB. unde (antecedentes quintuplicando) FG. IK :: 5TB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2GB + ZB. Item FG. FK [p] (:: 5. 3.) :: [h] 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 2ZB + 4YB + 4GB; ergo (jungendo conſequentes duarum proportionum (FG. IF :: 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 3ZB + 4YB + 6GB; vel inverſè IF. FG :: 2FB + 4YB + 6GB + 3ZB. 5FB + 10YB + 10GB + 5ZB; Item IR. FH ([r] $\frac{1}{5}$ FG) [g] :: ZB. FZ; [r] ergo RF (IF + IR) = $\frac{2}{5}$ FB; proindéque BR = $\frac{3}{5}$ FB; adeóque BR. RF :: 3.2; [s] unde punctum R eſt centrum gr. portionis ABC: ſit Q centrum portionis DBE; itaque BQ. QG :: 3.2; vel compoſitè BG. BQ :: 5.3 :: BF. BR [t] :: FG. QR :: 5.3 [p] :: FG. FH; [u] unde QR = FH; itaque demum [x] eſt QR. IR :: fruſt ADEC. port DBE; [y] quare punctum I eſt centrum gr. fruſti ADEC. *Q.E.D.*

o 11.5.
p *hyp.*
r 9 *hujus.*
s 8 *hujus.*
t 19. 5.
u 9. 5.
x *ſupr. cum* 7, & 11. 5.
y 6, & 7. 1 *æquip.*

D E

DE INSIDENTIBUS HUMIDO.

LIB. I.

Tractatus hic injuriâ temporis mutilus evaſit, nec Græcè extat; Latinam verſionem perpolivit Federicus *ille* Commandinus, *de literis hiſce optimè meritus, quem ſequimur* κατὰ πόδας. *Inſcriptionem fuiſſe* περὶ τῶν ὀχουμένων *diſcimus ex* Strabone; *id eſt de iis quæ vehuntur, geſtantur, feruntur, ſuſtinentur, continentur, vel inſident Humido; hæc enim omnia ſignificat* τὸ ὀχεῖσθαι. *Agit verò de Humidi naturâ, figurâ, quatenus admittit corpora, vel attollit, quantâque vi reſiſtit; quo ſitu in humido conſiſtit, vel movetur portio ſphæræ, quoque portio conoidis rectanguli, vel parabolici.*

Hypoth. I.

*Ponatur humidi eam eſſe naturam, ut partibus ipſius æqualiter jacentibus, & continuatis inter ſeſe, minus preſſa à magis preſſa expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido ſupra ipſam exiſtente ad perpendiculum, ſi humidum * ſit deſcendens in aliquo, aut ab alio aliquo preſſum.*

* *ſubſidat in uno, & ab alio prematur.*

Schol.

Ratio eſt, quia deſuper incumbens pondus partibus humidi proximè ſubjectis motum ſive conatum imprimit, & hæ ſequentibus continuò ad fundum uſque; ibi verò, quum ob præpotentem fundi reſiſtentiam progredi nequeat motus, reflectitur, & in latera ſe diffundens, adjacentes humidi partes conturbat, atque extrudit. Ex. g. pondus A (in fig. appoſitâ) premens ſubjectas humidi partes B, motum ipſis communicat, efficitque, ut à fundo C, ad modum inepto, ad par- Fig. 233.

tes D, E reſiliant, locúmque cedant deorſum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypotheſis.

Prop. I.

Fig. 234. *Si ſuperficies aliqua plano ſecetur, per idem ſemper punctum* (A) *ſitque ſectio* (B C) *circuli circumferentia, centrum habens punctum illud* (A), *per quod plano ſecatur, ſphæræ ſuperficies erit.*

Nam ab A ad ſuperficiem ducantur rectæ A B, A C utcunque, per
a *hyp.* quas tranſit planum; hoc in dicta ſuperficie [a] producet circuli
circumferentiam, cujus centrum A. [b]ergo A B, A C æquales erunt.
b 15. *def.* 1. Simili diſcurſu omnes rectæ ab A ad ſuperficiem ductæ æquales erunt.
c 1. *def.* 12 *theod.* [c]quare ſuperficies propoſita eſt ſphærica. *Q.E.D.*

Prop. II.

Fig. 235. *Omnis humidi conſiſtentis, atque manentis ſuperficies ſphærica eſt, cujus ſphæræ centrum eſt idem quod centrum terræ.*

Centrum terræ ſit A. Per hoc ſecetur humidum plano quocunque,
in quo ab A ad ſuperficiem humidi ducantur utcunque rectæ AB, AC.
a 15. *def.* 1. Hæ ſi pares fuerint, [a]liquet B C eſſe circumferentiam circuli, & [b]pro-
b 1 *hujus.* inde ſuperficiem humidi eſſe ſphæricam. Sin impares dixeris, centro
c 5 *ax.* 1. A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E [c] impares ſunt,
d 1 *hypoth.* & inæqualiter premunt ſibi ſubjectas humidi partes; [d]unde non conſiſtet humidum, ſed conturbabitur, contra hypotheſin.

Prop. III.

Fig. 236. *Solidarum magnitudinum* (X Y) *quæ æqualem molem habentes æquè graves ſunt, atque humidum, in humidum* (B A C) *demiſſæ demergentur, ita ut ex humidi ſuperficie* (B C) *nihil extet, non tamen adhuc deorſum ferentur.*

Biſecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus
D G E, intra humidum; & ſi dicatur aliquid ſolidi eminere, puta
Y, liquet contentum ſpatio B D G F, unà cum Y, majus eſſe humido
F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum ſolidum X Y humi-
a *hyp.* do [a]æquè grave ſit); quare pars D G magis premetur parte G E;
b 1 *hypoth.* [b]nec conſiſtet ſolidum, donec X Y omnino immerſum fuerit, tum vero
quieſcet, quum compreſſio ubique æqualis ſit. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. IV.

Solidarum magnitudinum (X) *quæcunque levior humido fuerit, demiſſa in humidum non demergetur tota, ſed aliqua pars ipſius ex humidi ſuperficie extabit.* Fig. 237.

Fiat ut in præcedenti, & ſi dicatur tota X demergi, quoniam X [a] levior eſt humido, liquet id quod continetur ſpatio B D G F minus ponderare humido F G E C, & proinde D G minus premi, quàm G E, [b] ideóque haud conſiſtere humidum, donec aliquid ipſius X emineat. *Q.E.D.*

a 1 *hyp.* b 1 *hypoth.*

Prop. V.

Solidarum magnitudinum (X Y) *quæcunque levior humido fuerit, demiſſa in humidum uſque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta eſt partis demerſæ* (X), *eandem quam tota magnitudo* (X Y) *gravitatem habeat.* *vid.* Fig. 236.

Si enim pars humidi æqualis demerſæ X non æquè gravis ſit, ac tota X Y, liquet id quod continetur ſpatio B D G F unà cum Y, & humidum C E G F non æquè ponderare; ergo D G, & E G inæqualiter premi, [a] ergóque humidum non manere, donec id eveniat. *Q.E.D.*

a 1 *hypoth.*

Prop. VI.

Solidæ magnitudines (A) *humido leviores, in humidum impulſæ, ſurſum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini* (A) *æqualem gravius eſt ipſâ magnitudine* (A). Fig. 238.

Sit X gravitas magnitudinis A, & X+Y gravitas humidi ipſi A æqualis. Adſumatur verò B, cujus gravitas ſit exceſſus Y. Itaque demiſſâ A+B in humidum, [a] demergetur ejus pars, cui æquale humidum gravitatem habet, quantam tota A+B, [b] hoc eſt ipſam X+Y. at humidum ipſi A æquale [b] tantam habet. ergo pars demerſa erit ipſa A. Conſtat verò A tantâ vi ſurſum niti, quantâ B deorſum premit; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorſum fertur vi gravitatis Y, ergo A eâdem vi aſſurgit. *Q.E.D.*

a 5 *hujus.* b *hyp.*

Brevius. Excedat humidum tibi æquale ſolidum gravitate Y. ergo humidum vi ſolidum demergenti reſiſtit gravitate, Y; quâ vi remotâ, ſurſum pellit A eadem vi.

Digitized by Google

Sch. Itaque gravia humido leviora, in ipſo quaſi abſolutè levia evadunt, deperditâ propriæ gavitatis vi, & efficaciâ.

Prop. VII.

Fig 239. *Solidæ magnitudines* (A) *humido graviores demiſſæ in humidum ferentur deorſum, donec deſcendant; & erunt in humido tanto leviores, quanta eſt gravitas humidi molem habentis ſolidæ magnitudini æqualem.*

Quòd A deorſum feretur patet, quia partes ipſi ſubjectæ reliquis magis preſſæ cedunt ipſi, locúmque dant. Porro humidi corpori A æqualis gravitas ſit X, ipſius verò A gravitas ſit $X + Y$. Liquet corpus A in humido exiſtens ſibi ſubjectas partes deprimere ſolâ gravitate Y, qua reſiſtentiam ſubjecti humidi exuperat. Quòd ſi extra humidum eſſet, totâ gravitate $X + Y$ ponderaret, ergo in humido exiſtens levior fit quantitate gravitatis X. *Q.E.D.*

Aliter. Sit $X + Y$ gravitas ſolidi A, & X gravitas ipſi æqualis humidi. Aſſumatur verò ſolidum B, cujus gravitas ſit X, eique æqualis humidi gravitas $X + Y$. Itaque compoſita $A + B$ ſibi æquali humido æquè grave eſt, (nam $2X + Y$ communis utriuſque eſt gravitas). [a]Itaque A B in humido immota conſiſtet. ergo [b] cùm B ſurſum nitatur impetu Y (quo ab humidi gravitate exceditur), eadem A deorſum feretur (æquipollent enim hæ vires, & altera alterius impedit effectum). unde liquet propoſitum.

a 3 *hujus.*
b 6 *hujus.*

Hypoth. II.

Ponatur eorum quæ in humido ſurſum feruntur, unumquodque *ſurſum ferri ſecundum perpendicularem, quæ per centrum gravitatis ipſorum ducitur.

* *& deorſum.*

Lemma I.

Fig. 240. Fig. 241. Circuli ſe interſecent punctis E, F, quæ connectat recta E F. centra autem T, H jungat recta T H. hæc biſecat rectam E F ad rectos.

Nam (ductis T E, T F, H E, H F) trigona T E H, T F H ſibi mutuò [a]æquilatera ſunt. [b]unde ang E T H = F T H. [c]ergo in trigonis E T K, F T K eſt E K = F K, & ang T K E = T K F. *Q.E.D.*

a 15. *def.* 1.
b 8. 1.
c 4. 1.

Lem.

Lemm. II.

In ſphæræ portione centrum gravitatis eſt in axe portionis. Demonſtratum hoc à *Commandino* de centro gr. prop. 15. & à *Luca Val.* lib. 2, prop. 34.

Prop. VIII.

Si aliqua magnitudo ſolida (A B C) *levior humido, quæ figuram portionis ſphæræ habeat in humidum demittatur, ita ut portionis baſis* (A C) *non tangat humidum; figura inſidebit recta, ita ut portionis axis* (D B) *ſit ſecundum perpendicularem. Et ſi ab aliquo inclinetur figura ut baſis portionis humidum contingat, non manebit inclinata, ſi demittatur, ſed recta reſtituetur.*

Fig. 242.

Inclinetur portio, & per axem B D, ac terræ centrum T tranſeat planum, faciens ſegmentum circuli A B C, cujus pars immerſa ſit E B F G. Jungatur E F, quem ſecet recta T H, connectens terræ ac ſphæræ centra T, H, & quidem [a]ad rectos in K [b]Eſtque centrum gr. *portionis E L F in L K, & portionis E M F in M K, & [c]proinde totius E L F M in L M, puta N. Portionis verò A B C centrum gr. [b]eſt in axe B D, puta in O. [d]Tranſitque recta N O per reliquæ extra humidum partis centrum gr. quod ſit P; connectatur T P. Cùm igitur pars immerſa [e]ſurſum feratur ſecundum rectam T N, pars verò extans deorſum ſecundum P T (neque hæ lationes ſibi invicem ullatenus obſiſtant, utpote per alias, aliáſque lineas peractæ) non quieſcet portio, donec hæc centra cum centro terræ in unam rectam incidant, hoc eſt donec axis D B ſit ſecundum perpendicularem. Tum verò quieſcent, quia quanto impetu quæ in humido eſt pars ſurſum, tanto quæ extra deorſum per eandem lineam contendit.

a *lemma præc.*
b
* *ducto plano per* E F *ad* T H *perpendiculari.*
c *cor.* 7. 1 *æqu.*
d 8 *æquip.*
e 2 *hypoth.* & 6 *hujus.*

Not. Recta N P libram repræſentat, in qua duo gravia E B F G, A E G F C diverſimodè ponderant (*levior eſt enim pars immerſa illâ, quæ extat). Suſpenſio fit ex puncto O. Radii ſunt O N, O P; deſcendit P, attollitur N; donec puncto O in T H conſtituto contingat æquilibrium.

* *6 hujus.*

Coroll. Ex his, cùm corporis cujuſcunque humido levioris pars alia demergatur, alia emineat, nunquam quieſcet corpus, & fluctuare deſinet, donec centra harum partium, totius, & terræ in una recta conveniant, quod ſi contingat, tum quidem conſiſtet corpus.

Prop

Prop. IX.

Fig. 243. *Quod ſi figura* (A B C) *humido levior in humidum demittatur, ita ut baſis tota ſit in humido, inſidebit recta, ita ut axis ipſius ſecundum perpendicularem conſtituatur.*

Invertatur figura præcedentis, & ex ſimili diſcurſu conſtabit propoſitum.

DE

DE INSIDENTIBUS HUMIDO,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

S*I magnitudo aliqua* (A B) *humido levior demittatur in humidum, eam in gravitate proportionem habebit ad humidum* (C D) *æqualis molis, quam magnitudinis demerſæ pars* (B) *habet ad totam magnitudinem* A B. Fig. 244.

Sit humidi C D pars C = A [a](unde D = B), corporúmque trium A B, C, D gravitates ſint X, Y, Z. [b]unde X = Z. ergo X . Y + Z [c]:: (Z . Y + Z *:: D . C + D ::) [d]B . A + B. *Q.E.D.*

a 3. *ax.* 1.
b 5. 1 *hujus.*
c 7. 5.
*
d *ſch.* 7. 5.

Lemma I.

Sit conus Iſoſceles rectangulus A B C, in quo ſectio parabola EDF, cujus vertex D, rectum latus R; erit A D = $\frac{1}{2}$ R. Fig. 245.

Nam B Cq [a]= (B Aq + C Aq = 2 B Aq ([b]ob B A = C A) =) 2 B A × C A. [c]& R . A D :: B Cq . B A × C A. ergo R . A D :: 2 . 1. *Q.E.D.*

a 47. 1.
b *hyp.*
c 11. 1 *Apoll.*

Not. A D ab *Archimede* nuncupatur, ea quæ uſque ad axem.

Lemma II.

Recta G Q tangens parabolen A B C diametro B D occurrat (M Q); in qua ubicunque ſumatur K N æqualis ei, quæ uſque ad axem; per contactum G ducatur G O parallela diametro, cui occurrat N O diametro perpendicularis; ducta K O tangenti G Q perpendicularis erit. Fig. 246.

Ducantur enim G Z tangenti, & G X diametro perpendiculares. Sitque R rectum latus parabolæ. Eſtque Q X × X Z [a]= ($\frac{GXq}{R}$ [b]=)

a *cor.* 8. 6. & 17. 6.
b 11. 1 *Apol.*

Digitized by Google

c 16. 6.
d 35. *1 Apol.*
e *Lemm. præc.*
f 7. 5.
g 34. 1.
h 33. 1.
k *conſt.*
l 29. 1.

R * X B. [c]ergo R . X Z :: (Q X . X B[d]:: 2. 1[e]::) R . K N. ergo K Z [f]= N X [g]= O G. [h]unde K O, Z G parallelæ ſunt; & cùm Z G tangenti G Q[k] perpendicularis ſit, [l]erit K O eidem perpendicularis. *Q.E.D.*

Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars ad verticem, ejus quæ ad baſim ſit dupla.

Demonſtratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, prop. 29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

Prop. II.

Fig. 147.

Conoidis rectanguli recta portio (A B C) *quando axem* (B D) *habuerit minorem quàm ſeſquialterum ejus* (K N) *quæ uſque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demiſſa in humidum, ita ut ipſius baſis* (A C) *humidum non contingat, & poſita inclinata, non manebit inclinata, ſed recta reſtituetur. Rectam dico conſiſtere talem portionem, quando planum, quod ipſam ſecuit, ſuperficiei* (E F) *humidi fuerit æquidiſtans.*

a 12 *de conoid. & ſphæroid.*
b 5. 2 *Apol.*
c 3 *Lem. præc.*
d *hyp.*
e 8. 1 *æquipond.*
f 2 *lem. præc.*
g 29. 1.
h 32. 1.
k 29. 1.
l 2 *hyp.* 1 *huj.*
m *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

Secetur conoides plano per axem [a] facienti ſectionem A B C parabolam (quod in ſequentibus ſemper concipiatur factum, quamvis brevitatis cauſa reticeatur) cujus pars ſubmerſa habeat diametrum G H. Sectionem verò tangat G Q ad E F [b]parallela. Portionis ABC centrum gr. ſit K, unde K B [c]= $\frac{2}{3}$ D B [d]$\sqsupset$ K N. Sitque L centrum gr. partis demerſæ, [e] unde in protractâ L K erit centrum gr. reliquæ partis, quod ſit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B D, & connectatur K O ſecans tangentem Q G in P; [f]& quidem ad rectos. Jam ob angulos [h]K G P, K Q P ([k] B I F) acutos, liquet perpendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M exiſtere in rectâ K P; etſi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendiculares, [l]pars demerſa ſurſum nitetur per rectam R L, pars extans deorſum ſecundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, [m] unde non conſiſtet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q.E.D.*

Prop. III.

Fig. 248.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm ſeſquialterum ejus quæ uſque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demiſſa in humidum ita ut baſis ipſius tota ſit in humido, & poſita inclinata, non manebit inclinata, ſed ita reſtituetur, ut axis ipſius ſecundum perpendicularem ſiat.

Inverſâ figurâ, ſimili planè diſcurſu probatur, quo antecedens.

Prop. IV.

Fig. 249.

Recta portio (A B C) *conoidis rectanguli, quando fuerit humido levior, & axem* (B D) *habuerit majorem, quàm ſeſquialterum ejus* (K N) *quæ uſque ad axem; ſi in gravitate ad humidum æqualis molis non minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod ſit ab exceſſu* (B T), *quo axis major eſt, quàm ſeſquialter ejus* (K N) *quæ uſque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe* (B D), *demiſſa in humidum, ita ut ipſius baſis* (A C) *humidum non contingat, & poſita inclinata, non manebit inclinata, ſed recta reſtituetur.*

Præparatio imitatur præcedentem, ſimiléſque lineæ eidem literis deſignantur, (quod ferè ſit in ſequentibus.) Sit verò gravitas corporis A B C ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Eſtque G Hq. B Dq [a]:: (port E G F. A B C [b]::) Y. Z [c]$=$ vel $\sqsubset$ B Tq. B Dq. [d]ergo G H $=$ vel $\sqsubset$ B T, [e]quare G L $=$ vel $\sqsubset$ B N. (nam ob B T $+ \frac{3}{2}$ K N [c]$=$ B D [f]$= \frac{3}{2}$ B K [g]$= \frac{3}{2}$ B N $+ \frac{3}{2}$ K N, idcóque B T [h]$= \frac{3}{2}$ B N. itémque G H [f]$= \frac{3}{2}$ G L, [k]erit G H. B T :: G L. B N). ergo G L $\sqsubset$ G O ([l]$\sqsupset$ B N). ergo punctum O eſt inter L, G. Nec centra totius portionis, & partium in eadem ſunt linea, ſed pars demerſa [m]ſurſum tendit per R L, & altera deorſum per M S. unde non conſiſtet portio A B C &c. ut in præced.

Coroll. B N $= \frac{2}{3}$ B T.

a 26. *de conoid. & ſphæroid.*
b 1 *hujus.*
c *hyp.*
d 9 *vel* 10.5 & 22.6.
e 14 5.
f 3 *lem.* 1 *huj.*
g 1. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 15. 5.
l 17. 1. *con. Apol*
m 2 *hyp.* 1 *huj*

Prop. V.

Fig. 250.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit majorem, quàm ſeſquialterum ejus, quæ uſque ad axem; ſi ad humidum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm exceſſus, quo quadratum quod ſit ab axe, majus eſt quadrato, quod ab exceſſu, quo *axis major eſt, quàm ſeſquialter ejus, quæ uſque ad axem, ad quadratum quod ab axe; demiſſa in humidum, ita ut baſis ipſius tota ſit in humido, & poſita inclinata non manebit inclinata, ſed reſtituetur ita, ut axis ipſius ſecundum perpendicularem fiat.*

a 26 *de conoid. & ſphæroid.* Invertatur figura præcedentis, & ſtantibus quæ ibidem dicta ſunt,
b *invertendo, et cor.* 19. 5. quoniam B Dq. G Hq [a] :: port A B C. E G F; [b] erit B Dq — G Hq.
c 1. 2 *hujus.* B Dq :: (port A B C — E G F. A B C [c] ::) Y. Z [d] =, vel ⊐ B Dq —
d *hyp.* B Tq. B Dq. [e] ergo B Dq — G Hq =, vel ⊐ B Dq — B Tq. [f] quare
e 9. *vel* 10. 5. B T =, vel ⊐ G H & deinceps, ut in præcedenti.
f 22. 6.

Lemma.

Fig. 251. In triangulo T D A ſi latus T D ita dividatur, ut ſit T D. T I :: V D. Q I, ducantúrque per V & Q parallelæ ad D A, & I A, hæ convenient in latere T A.

Nam T D. T I [a] :: T V. (T D — V D). T Q (T I — Q I): ergo
a *hyp.* & 19. 5. convertendo T D. I D :: T V. Q V. atqui I D. D A [b] :: Q V. V Y.
b 4. 6. (ob V Y ad D A, & Q Y ad I A parallelas) ergo ex æquo T D. D A
c *conv.* 4. 6. :: T V. V Y. [c] ergo T Y A eſt recta linea. *Q.E.D.*

2. Quòd ſi conveniant parallelæ in Y, erit T D. T I :: V D.
d 4. 6. Q I. Nam T D. D A [d] :: T V. V Y. & D A. I D [d] :: V Y. Q V. ex
f 19. 5. æquo igitur T D. I D :: T V. Q V. [f] ergo T D. T I :: T V. T Q ::
V D. (T D — T V). Q I. (T I — T Q). *Q.E.D.*

Coroll. T V. T Q :: V D. Q I.

Prop. VI.

Fig. 252. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C) *quando levior humido axem* (B D) *habuerit majorem quidem, quàm ſeſquialterum ejus* (K N) *quæ uſque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ uſque ad axem proportionem habeat, quam quindecim ad quatuor, in humidum demiſſa, adeò ut ipſius baſis* (A C) *contingat humidum* (A F), *nunquam conſiſtet inclinata, ita ut baſis in uno puncto humidum contingat.*

Fiat ut in præcedentibus, & porro ſit K V = $\frac{4}{5}$ D B; (unde cùm
a 3. *lem.* 1. 2 *h.* D K [a] = $\frac{3}{15}$ D B, erit D V = $\frac{9}{15}$ D B, & B V = $\frac{6}{15}$ D B, & proinde B V = $\frac{6}{9}$ D V = $\frac{2}{3}$ D V). Contingant G Q, A T occurrentes diametro T Q B D; ducantúrque V Y (ſectioni occurrens in M, tangenti Q G in Y), N O, G X, H ω baſi A C parallelæ.

Jam ſi B D, B V, B X ſint ∺ (quod fortè contingere poteſt), [b] etiam D Aq, V Mq, X Gq erunt ∺ in eadem ratione, [c] ergo D A, V M, X G erunt ∺. Item B V. B X [d]:: B D. B V [e]:: D Aq. V Mq [f]:: D A. X G [g]:: D I. X Q (ob trigona A D I, G X Q ſimilia). ergo permutando D I. B V :: X Q ([h] I ϖ, ob ϖ H [k] = X G). B X [l]:: 2. 1 [m]:: D ϖ (D I — I ϖ). V X (B V — B X) [l] :: T D. B D. Item (ob B D. B V [d]:: B V. B X. erit convertendo). B D. V D :: B V. V X. ergo ex æquo T D. V D :: D I. V X. & permutando T D. D I :: V D. V X. ac convertendo T D. T I :: V D. V D — V X, vel Q I. (Nam Q I [k] = G H [k] = X ϖ = V ϖ + V X = V ϖ + $\frac{1}{2}$ D ϖ = V ϖ + D ϖ — $\frac{1}{2}$ D ϖ = V D — $\frac{1}{2}$ D ϖ [n] = V D — V X). [o] ergo punctum Y eſt in T A. Porro, quia V D. X ϖ ([n]G H) [*]:: T V ([p]D B + B V). T Q ([q]D X) [r] erit V D. G H :: D B + B V — V D. D X — X ϖ. atqui D B + B V — V D = 2 B V [n] = D I. & D X — X ϖ = D ϖ. [s] ergo V D. G H :: D I. D ϖ [t]:: B V ($\frac{1}{2}$ D I). $\frac{1}{2}$ D ϖ ([n]V X, vel G Z). & permutando G H. G Z :: D V. B V [u]:: 3. 2. [x] unde punctum Z erit centrum portionis A G F, in hoc caſu.

Quod ſi porcio major ſit minórve, quàm ut B D, B V, B X ſint ∺, ſit illa *a* B *c*, diametro B *d*, baſe *a c* ad A C parallelâ, ita ut ſubmergatur portio *a* B *f*, diametro G *h*, baſe *a f* ad A F itidem parallelâ, cui occurrat tangens T A R, ducatúrque R S ad A C parallela, & occurrens diametro B *d* in S. Eſtque S V. D V [y] :: R Y. A Y [y]:: G *h*. G H. & permutando S V. G *h* :: D V. G H [u]:: B V. G Z. iterúmque permutando G *h*. G Z :: S V. B V [z] ⊏ *d* V. B V [u]:: 3. 1. quare in hoc caſu centrum cadit inter *z*, & *h*; & proinde infra O in quocunque caſu (quoniam K V ⊐ K N). Itaque cùm tota portio gravitet ſecundum rectam K O P. & pars quæ demergitur, quæque extat per alias, liquet ſolidum non conſiſtere &c. ut in præcedentibus.

Coroll. B V = $\frac{4}{15}$ D B.

Prop. VII.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit, majorem quidem, quàm ſeſquialterum ejus, qua uſque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ uſque ad axem proportionem habeat, quàm 15 ad 4, in humidum demiſſa adeò ut baſis ipſius tota ſit in humido, nunquam conſiſtet ita, ut baſis contingat humidi ſuperficiem, ſed ut tota in humido ſit, & nullo modo ejus ſuperficiem contingat. Fig. 253.

Inverſâ figurâ, eodem modo demonſtratur quo antecedens.

[b] 20 1 Apol.
[c] 22. 6.
[d] hyp.
[e] priùs.
[f] cor. 20 6
[g] cor. 4. 6.
[h] 4. 6.
[k] 34. 1.
[l] 35. 1 Apol.
[m] 19. 5.
[*] cor. lem. præc.
[n] priùs.
[o] lemm. præc.
[p] 35. 1 Apol. & 2. ax. 1.
[q] 35. 1. Apol. & 3. ax. 1.
[r] 19. 5.
[s] ſchol. 7. 5.
[t] 15. 5.
[u] priùs.
[x] 3 lem. 1. 2 h.
[y] ſib. 2. 6.
[z] 8. 5.

Prop. VIII.

Fig. 253. 254.

Conoidis rectanguli recta portio (ABC), *quando axem* (BD) *habuerit majorem quidem quàm ſeſquialterum ejus* (KN) *quæ uſque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam, quæ uſque ad axem, proportionem habeat, quam* 15 *ad* 4: *ſi in gravitate ad humidum habeat proportionem minorem ea, quam quadratum, quod fit ab exceſſu* (BT) *quo axis major eſt, quàm ſeſquialter ejus quæ uſque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demiſſa in humidum, ita ut baſi ipſius* (AC) *humidum non contingat, neque in rectum reſtituetur, neque manebit inclinata, niſi quando axis* (BD) *cum ſuperficie humidi* (EF) *angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicetur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad BDq [a] $\sqsupset$ BTq. BDq. [b] itaque Z $\sqsupset$ BT, [c] & $\frac{2}{3}$Z $\sqsupset$ BN ([d] $\frac{2}{3}$BT). Sit Nφ = $\frac{2}{3}$Z. & erigatur $\varphi\psi = \sqrt{\frac{1}{2}KN \times B\varphi}$, junganturque B$\psi$, erit angulus $\varphi B\psi$, is quem propoſitio innuit. Nam 1. ſit ang $\varphi B\psi$ = ang EID, vel GQX. Eſtque KN. XQ [e]:: KN $\times$ XQ. XQq [f]:: GXq. XQq (nam KN $\times$ XQ [g] = (KN $\times$ 2XB [h] = 2KN $\times$ XB [k] =) GXq) [l]:: $\varphi\psi$q. Bφq (ob [m] ſimilia trigona QXG, B$\varphi\psi$) [n]:: $\frac{1}{2}$KN $\times$ Bφ. Bφq [c]:: $\frac{1}{2}$KN. Bφ [c]:: KN. 2Bφ [o]:: KN. XQ. [p] ergo 2Bφ = XQ. & XB ([g] $\frac{1}{2}$XQ) = Bφ. unde XN = φN [m] = $\frac{2}{3}$Z. Cúmque ſit GHq. BDq [q]:: (port EGF. ABC [r]::) Zq. BDq, & propterea GH [s] = Z, erit $\frac{2}{3}$GH ([t] GL) [c] = $\frac{2}{3}$Z [u] = φN [x] = GO [y] = GL. & centrum L cum O coincidet. quare centra portionum ſunt in perpendiculari KP, & [z] proinde tota portio immota conſiſtet.

2. Quòd ſi ang $\varphi B\psi \sqsupset$ ang XQG, fiat ang XQY = $\angle\, \varphi B\psi$. Eſtque KN. XQ ([a]:: GXq. XQq) [b] $\sqsubset$ YXq. XQq [c]:: $\varphi\psi$q. Bφq [d]::) KN. 2Bφ. [e] unde XQ ([f] 2XB) $\sqsupset$ 2Bφ. [g] & BX $\sqsupset$ Bφ. quare NX (GO) $\sqsubset$ (Nφ = [h] $\frac{2}{3}$Z = [k] $\frac{2}{3}$GH) [l] = GL. Cadit igitur punctum O intra centrum L: nec ſunt centra portionum in una recta KP. unde tota portio non conſiſtet.

3. Quòd ſi ang $\varphi B\psi \sqsubset$ XQG, ſimili diſcurſu oſtendetur punctum O cadere ſupra L. [z] unde etiam conſequetur motus portionis ABC, quomodo ſæpius inculcatum.

Prop. IX.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit, majorem quidem quàm ſeſquialterum ejus, quæ uſque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam quæ uſque ad axem proportionem habeat, quam 15

quàm

[a] *hyp.*
[b] 10. 5. & 22. (6.
[c] 15. 5.
[d] *cor.* 4. 2 *h.*
[e] 1. 6.
[f] 7. 5.
[g] 35. 1 *Apol.*
[h] 16. 6.
[k] 11. 1 *Apol.* & 1. *lem.* 1. 2 *h.*
[l] 4. 6.
[m] *conſtr.*
[n] *conſtr.* & 7. 5.
[o] 11. 5.
[p] 9. 5.
[q] 26. *de conoid.* & *ſphæroid.*
[r] *hyp.* & 1. 2 *h.*
[s] 9. 5.
[t] 3. *lem.* 1. 2 *h.*
[u] *conſtr.*
[x] 34. 1.
[y] 1. *ax.* 1.
[z] *ſch.* 8. 1 *huj.*
[a] *priùs. ſuprà.*
[b] 8. 5.
[c] 4. 6.
[d] *ut ſuprà.*
[e] 10. 5.
[f] *priùs.*
[g] 15. 5.
[h] *conſtr.*
[k] *ſupra.*
[l] *hyp.*
[z] *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

ad 4, & in gravitate ad humidum proportionem habeat majorem, quàm exceſſus, quo quadratum quod ſit ab axe majus eſt quadrato, quod ab exceſſu, quo axis eſt major, quàm ſeſquialter ejus, quæ uſque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, in humidum demiſſa adeò ut baſis ipſius tota ſit in humido, & poſita inclinata, nec convertetur ita ut axis ipſius ſecundùm perpendicularem ſit, nec manebit inclinata, niſi quando axis cum ſuperſicie humidi angulum fecerit æqualem angulo ſimiliter ut priùs aſſumpto.

Nam inversâ figurâ præcedentis, quoniam B Dq. G Hq [a]:: port A B C. E G F, [b] erit B Dq—G Hq. B Dq (:: port A B C—E G F. A B C [c]:: Zq B Dq) [d] $\sqsubset$ B Dq—B Tq. B Dq [e]quare B Dq—GHq (—Zq) $\sqsubset$ B Dq—B Tq. * ergo Z $\sqsupset$ B T. & $\frac{2}{3}$ Z (Nq) $\sqsupset$ $\frac{2}{3}$ BT (N B) &c. ut in præcedenti.

a 26 de conoid.
b cor. 9. 5. & 4. 5
c hyp. & 1. 2 b.
d hyp.
e 10. 5.
* 17. ax. 1.

Schol. Sit I K axis parabolæ G I C, ejuſque baſis G C = 2 G K. & educatur G N, utcunque ſecans parabolam G B A. Ordinatim applicetur N P, & connectatur G P occurrens ipſi B D in O: à quo applicetur O H ordinatim. Sintque R, S recta latera ſectionum G I C, G B A. Súntque tam I K, K G, R, quàm B D, B G, S in $\div\div$, unde cùm I K. K G :: B D. D G. erit I K. R :: B D. S. & permutando I K. B D (I G. B G, vel I P. B O) :: R. S. atqui I P, N P, R, & B O, H O, S ſunt etiam $\div\div$. ergóque I Pq N Pq :: (I P. R :: B O. S ::) B Oq. H Oq. ergo permutando I P. B O :: G P. G O ::) N P. H O. unde ſectionis punctum H eſt in recta G N. & hinc

Fig. 256.

1. *Coroll.* G N. G H (G P. G O) :: G I. G B :: (G K. G D) :: G C. G A. & G H. H N :: G A. A C :: G B. B I :: G D. D K.

Porro, ducatur N M ad I K parallela. Eſtque G C. G A :: (G N. G H :: G M. G K :: M C. A K. & permutando G C. M C :: G A. A K :: L K. H K. item G C. G K :: 2. 1 ::) L K. L I. ergo G C. M C + G K :: L K. H K + L I. ergo G C. K M :: L K. I H. vel G K. K M (:: G H. H N, vel G A. A C, vel G D. D K) :: L I. (I K). I H. Hinc

2. *Coroll.* L K. H K :: G A. A K. & dividendo L H. H K :: G K. A K. Et ſimili diſcurſu

$$\left.\begin{matrix} \text{E X. X B} \\ \textit{l y. y h.} \end{matrix}\right\} :: \text{G K. A K :: L H H K.}$$

Porro, quia L I. I H :: G A. A C. erit inversè componendo I H. L H :: A C. G C. Item L H. H K :: G K. A K. atqui I H. H K = I H. L H (A C. G C) + L H. H K (G K. A K)

3. *Coroll.* I H. H K = A G. G C + G K. K A.

Quòd ſi baſe K G fiat altera parabola G I K, ſimilis prioribus, ſimiliter ler erit $\left\{\begin{matrix} XB.\,BZ \\ yh.\,\,hi \end{matrix}\right\} = AG.GC + GK.KA = IH.HK.$

Prop. X.

Fig. 257. Fig. 258 *Recta portio* (A B C) *concidis rectanguli, quando levior humido habuerit axem* (B D) *majorem quàm ut ad eam* (K N) *quæ uſque ad axem proportionem habeat, quàm 15 ad 4, in humidum demiſſa, ita ut baſis ipſius* (A C) *non contingat humidum; nonnunquam quidem recta conſiſtet, nonnunquam inclinata; & interdum adeò inclinata, ut baſis ipſius in uno puncto contingat ſuperficiem humidi; idque in duabus diſpoſitionibus, interdum quidem ita ut baſis in humidum magis demergatur, interdum verò ita ut ſuperficiem humidi nullo modo contingat, ſecundum proportionem quam habet ad humidum in gravitate. Eorum quæ dicta ſunt ſingula inferiùs demonſtrabuntur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq; ſitque
a *hyp.* $BK = \frac{9}{15} BD$; & $KV = \frac{4}{15} BD$, & KN ($\sqsupset$ [a]KV) ea quæ ad
axem; & $DT = \frac{3}{2} KN$.

b *conſtr.* 1°. Si Zq. B Dq non $\sqsupset$ B Tq. B Dq. quoniam BT [b] $= BD - \frac{3}{2} KN$, in humidum demiſſa portio A B L non niſi recta conſiſtet,
juxta 4 hujus.

c *vid ſch. 5. de quad. parab.* Pro ſequentibus jungatur A B, quam ſecet $V\varsigma$ ad B C parallela.
Item biſecta A B in μ, ducantur $\varsigma\gamma$, $\mu\nu$ ad B D parallelæ: tum ad ba-
d *ibid.* ſibus ad A C diametriſque $\varsigma\gamma$, $\mu\nu$ [c]deſcribantur parabolæ $A\varsigma\alpha$,
e 4. 6. $A\mu D$; quarum $A\varsigma\alpha$ [d]tranſibit per K, (nam DA. $V\varsigma$ ($D\gamma$) [e]:: BD.
f *corol. 6. 2. b.* BV [f]:: 15. 6. & dividendo $A\gamma.\gamma D$ :: 9. 6 [g]:: 3. 2 [h]:: BD. BK).
g 15. 5. Producatur $N\epsilon$ ad D A parallela, occurrens ſectioni $A\varsigma\alpha$, punctis
h *priùs.* δ, ϵ. per quæ ducantur $\theta\delta\zeta$, $\kappa\epsilon\lambda$ ad B D parallelæ. Eſtque $A\alpha$.
k 3 *cor. ſch. 5 de quadr. parab.* αC :: 4. 10 :: 2. 5. (nam poſito $AC = 10$, vel $AD = 5$, erit
l 20. *d f.* 5. $A\gamma$, vel $\gamma\alpha$ [h]$= 3$, & $\gamma D = 2$, unde $D\alpha = 1$, & $\alpha C = 4$. itaque
m $\theta\delta.\delta\varpi$ ($C\alpha.CA + AD.D\alpha$) [h]$= 2.5 + 5.1$ [l]$= 2.1$ [m]::
$\kappa\epsilon.\epsilon\xi$. denique ducantur tangentes $\theta\phi$, $\kappa\psi$.

Concluſio 2.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* B T *ad quadratum* B D *majorem verò quàm quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demiſſa in humidum adeò inclinata, ut ipſius baſis* (A C) *non contingat humidum, inclinata conſiſtet, ita ut baſis ſuperficiem humidi nullo modo contingat, & axis* (B D) *cum humidi ſuperficie* (E F) *angulum faciat majorem angulo* (ϕ).

Nam quia Zq. B Dq. $\left\{\begin{matrix} {}^{a}\sqsubset \theta\varpi q.\ B\,Dq \\ \sqsupset B\Gamma q.\ B\,Dq\end{matrix}\right.$, [b]erit Z $\left\{\begin{matrix}\sqsubset \theta\varpi \\ \sqsupset B\Gamma\end{matrix}\right.$ quare ſi inter ſectiones A B C, Aμ D aptetur ad B D parallela recta G H [c]= Z, cadet hæc inter B D, & θϖ: per H ducatur recta A F, quæ humidi ſuperficiem repræſentet. Itaque G H eſt diameter demerſæ portionis A G F. ducatur tangens G Q, ſitque G L = $\frac{2}{3}$ G H, ([d]unde L eſt centrum portionis A G F), ducatúrque L K M, [e]ſic ut M ſit centrum partis extantis, & ob G L [f]= 2 L H, erit G O ⊐ 2 O H, quare O cadit ſupra L; & cùm portio A B C [g]feratur juxta rectam K O, pars demerſa attollatur per illi parallelam L R, altera deprimatur ſecundum M S; quieſcat tandem, ut humidi ſuperficies ſit E F, eique parallela tangens X Y, conſtátque eſſe ang X Y B [h]⊐ ang Q [h]⊐ ang φ. *Q.E.D*

a *hyp.*
b 10. 5.
c *corol.* 8. 2 *b.*
d 3 *lemm.* 2 *b.*
e 8. 1 *æquip.*
f *conſtr.*
g 2 *hypoth.* 1. *b.* & 2 *lem.* 1. 2 *b.*
h 16. 1.

Concl. 3.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate eam habeat rationem, quam quadratum* θϖ *ad quadratum* B D, *demiſſa in humidum inclinata adeò, ut baſis ipſius non contingat humidum, conſiſtet & manebit ita, ut baſis* (A C) *in uno puncto humidi ſuperficiem* (Aϖ) *contingat, & axis cum ſuperficie humidi angulum faciat angulo* φ *æqualem. Quod ſi portio ad humidum in gravitate eam proportionem habeat, quàm quadratum* κξ *ad quadratum* B D, *in humidum demiſſa, & poſita inclinata adeò, ut baſis ipſius* (A C) *non contingat humidum; conſiſtet inclinata, ita ut baſis in uno puncto humidi ſuperficiem contingat, & axis cum ea faciat angulum angulo* ψ *æqualem.*

Nam 1°. θϖ ([a]Z) eſt diameter portionis A B *f*, ejuſque centrum [b]eſt δ (ob θδ [c]= 2δϖ), & ſi per K δ ducatur recta, [c]hæc per tria centra tranſibit, & ſecundum ipſam tota portio, ipſæque partes ferentur, [d]ergo immota conſiſtet portio. Eſtque ang φ = ang Aϖζ (ob θφ, Aϖ, & θϖ, B D parallelas). Quòd ſi portio in alio ſitu conſtituatur, centrorum ſitus immutabitur, neque in una recta convenient, unde commovebitur portio, donec in hunc ſitum reſtituatur. Simili diſcurſu, ſi Zq. B Dq :: κξq. B Dq, erit κξ (= Z), diameter portionis ſubmerſæ, & tota portio conſiſtet ſub angulo ψ = Aξλ &c.

a *cor.* 8. 2 *huj.*
b 3 *lem.* 1. 2 *b.*
c 2 *lem.* 1. 2 *b.* & 2 *hypoth.* 1 *b.*
d *ſch.* 8. 1 *huj.*

Concl. 4.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate majorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* κξ *ad quadratum* B D, *minorem*

verò

Digitized by Google

verò quàm quadratum θδ ad quadratum B D ; *in humidum demiſſa, & inclinata, adeò ut ipſius baſis* (A C) *non contingat humidum conſiſtet, & manebit ita, ut baſis in humidum magis demergetur.*

Simili ferè diſcurſu probatur, quo ſecunda concluſio inter parabolas A B C, A μ D aptando G H (= Z ;) quæ in hoc caſu cadet inter

a *hyp.* & 10.5. θϖ, κξ, quia $Z\,^{a}\left\{\begin{matrix}\sqsupset \theta\phi \\ \sqsubset \kappa\xi\end{matrix}\right\}$. Eritque tum (in ſitu A G F) G O $\sqsubset$ 2 O H, & propterea punctum O cadit inter centrum L, & H ; neque conſiſtet humidum in illo ſitu, ſed quum baſis magis demergitur.

Concl. 5.

Fig. 239.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate proportionem habeat minorem, quàm quadratum* κξ *ad quadratum* B D ; *demiſſa in humidum, & poſita inclinata adeò ut baſis ipſius* (A C) *non contingat humidum, conſiſtet inclinata, ita ut ipſius axis* (B D) *cum humidi ſuperficie angulum faciat* (Q) *minorem angulo* ψ, *& baſis* (A C) *nullo modo ſuperficiem humidi contingat.*

Probatur itidem ut 2ᵈᵃ, aptando rurſus G H = Z, & hic in ſitu A G F erit G O $\sqsupset$ 2 O H, & punctum O cadet inter centrum L, & verticem G. itaque ut conſiſtat, inclinari debet.

Liquet verò in hoc caſu poſitâ E F ſuperficie humidi conſiſtentis, G H diametro portionis E G F, G Q ad E F parallelâ, eſſe ang Q $\sqsupset$ ψ.

a 16. 1.
b *ex.* 35.1 *Apol.*
c *ſupra.*
d *conſtr.*
e 3 *lem.* 1. 2 *b.*

Nam ſi ang Q $\sqsubset$ ψ, [a]erit idcirco punctum Q inter B, & ψ, [b] & punctum G inter B, & κ. [b]unde G O $\sqsubset$ κε. Atqui κε [c]$= \frac{2}{3}$ κξ [d]$\sqsubset \frac{2}{3}$ G H $= \frac{2}{3}$ Z. unde G O $\sqsubset \frac{2}{3}$ G H. [e]unde O non erit centrum portionis E G Q. quare portio A B C non conſiſtet, contra hypotheſin.

F I N I S.

Digitized by Google

LEMMATUM ARCHIMEDIS, *quæ vocantur, Editio Nova.*

PRÆFATIO.

HÆC مأخوذات *Machudât*, ſive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna uſum habet atque elegantiam, nè penitùs interirent inter *Motawaſſetât* متوسطات i.e. libellos inter Elementa *Euclidéana* grandémque *Ptolemæi* Syntaxin medios, (quos *Alexandrini* jam olim μικρὸν Ἀστρονόμον appellitabant,) adſervare maluerunt *Arabum* Mathematici: quod præter præfationem *Abi'lHaſan*, duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio ſatis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl. *Thabetus Corraides*. Poſtea Notis ſuis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHaſan* (vel *Abu'lHonein*, ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Naſvæus* ابو الحسن علي بن احمد النسوي. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici verſione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadverſionibus pauculis *Sam. Foſteri* Prælectoris *Greſhamenſis* ſæculi hujuſce devergentis anno LIX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchel-*

Digitized by Google

lenſis, quam ſuis adnotatis illuſtravit, atque adeò *Florentiæ* edidit egregius Mathematicus *Alf. Borellus.* Valdè autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de iſtorum Lemmatum Authore tam anxiè diſputare: dummodo conſtat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud eſſe quod ad Tactiones *Apollonianas* ſuo ex ingenio poſuit *Pappus*: tum quartum quintúmve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propoſitionem ἀρχαίαν ſed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce ſextum ita conjectam hodiéq; legis) illuſtratam voluit, nim. *Prop.* XIV. & XVII. *Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Matheſi præ cæteris clarius fuit notiúſque, vocabula ipſa ἄρϐηλον & σελήνιον (*Lem.* 4. & 15.) ſummo viro retulere; quanquam *Pappus*, cujus fortean de ſcriptis *Eutocius* (ſic amat) pleraque hæc Lemmata carpſerat, ſimpliciùs paulò dixerat, χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρϐηλον: de voce alterâ certa eſt fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuiſſe. *Opus potius eſſe mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate ſive *Archimedis* ſive *Apollonii*, (talia enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent ſcioli, hominis pænè Divini nomen additum inſcriptúmque. Lemmatum verò ſuorum libellum ſcripſiſſe olim *Archimedem* nullus putem aut voluiſſe. Iſthæc ita præcipuæ modò Propoſitioni præmittere ſolet, modò ἐπὶ τέλει ſubjicere. Quod ad quartum alterius libelli περὶ σφ. καὶ κυλ. conqueritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto perplaceat: pleriſque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀνάλυσιν quàm σύνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidiſſe; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repererat *Eutocius* adeò fuiſſe propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

Ii homines huic etiam tribuerunt libellum, qui erat Zenodori de Iſoperimetris, imò fragmentum de Statica, atque alia.

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omninò ſubvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex ſe liber iſte eſt, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò ſubmonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præſtantiſſimi viri D. *Jac. Golii* fuiſſe expreſſa; ſive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenſis* atque ego vidimus, ſive potiùs ingenio ac eruditione ſuis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, déque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ ſentio ipſe, & omnes ſcire oportet, quando adhuc alia quàm ſtricturas ſcripſero & Epitomas.

ARCHIMEDIS LEMMATA.

Lemma I.

Binorum circulorum A B C, D B E, *ſeſe intra extrave tangentium in* B *diametri* AC, DE *invicem parallelæ ſint; recta linea eſt quæ per* A D B *tranſit.* Fig. 260. 261.
a 11,12,3.
b 31. 1.

Adjunctæ rectæ [a]F G B æquidiſtet [b]D H. Jam propter æquales c 34. 1.
H F [c], D G [d], G B, necnon [d]F A, F B; erit H A = [e]F G = [e]DH, d 15. *def.*
& [f]A D H = A. Atque ob pares [g]B G D, B F A, D H A, erunt e *ax.* 3, 2.
[h]B D G + B = A + A D H = 2 A, & B D G [k] = A. Unde f 5. 1.
[l]A D G + A [g] = 2 rect = A D G + G D B. Recta igitur [m]linea g 29. 1.
eſt A D B. Aut in fig. alterâ, Unde [l]A B G + A (= [n]F B D + h *cor.* 32. 1.
H D B) [g] = 2 rect = A B G + (B D G [f]) G B D, & A B D[m] k *ax.* 7.
recta eſt. l *ax.* 2, 1.
m 14. 1.
n 15, 29. 1.

Nota.

Hoc lemmate *Prop.* XXIV^{am} Operis *Apollonii* περὶ ἐπαφῶν jam olim illuſtrabat *Pappus*, ut videre eſt *Prop.* CX. LVII^{mi} Συναγωγῶν. Commonſtrat verò (connexis radiis G B, F B, & ipſis G D, F C invicem parallelis) tam F B G quàm A B D rectas eſſe, apodixi probâ quidem (contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam!

Eſt enim ductâ tangente O P, G B O [o] = recto [o] = O B F, atque o 18. 3.
[p]G B F rectæ. Et, quia [p]D G. G B :: B F. F A, & D G B [g] = p *def.* 15. *et* 7. 5.
B F A, erit [r]G B D = F B A. Recta autem eſt G F, ergo [s]A B D r 6. 6.
etiam recta. s *ſch.* 15. 1.

Conſimile autem Lemmation Cl. *Comandinus* Propoſitioni XIV. Libri Quarti Collect. *Pappi* addidit, ut opus fuit, quod vide. Verùm id jam obiter monitum velim, Propoſitionem illam XIV *Pappi* eandem omninò fuiſſe (ſic reor) cum XXIV^{ta} Geometræ *Pergæi* de

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto; omnes, equidem ipſas eadem Lemmatia, Illuſtrationes eaſdem, ut probè conſtent, expoſcere.

Caſum duntaxat facillimum expoſuit *Abu'lHaſan*, parùm quidem peritè, ubi A D B, F G B diametris A C, E D rectè inſiſtant, nempe (H—A) A D H + recto H D G + G D B (G—B) = 2rectis. recta igitur ipſa A D B.

Lemma II.

Fig. 262. *Si ſemicirculum* A B C *à puncto* D *tangant rectæ* A D, D B, *& deducatur* B E ⊥ A C *: connexa* C D *ipſam* BE *bifariam ſecabit in* F.

a 31.3.& 13.1
b 18.3.& 28.
c *cor.* 36. 3.
d 9.1.
e 29.1.& 4.6.
f 14.5.
g *cor.* 32. 1.
h *ut modò.*
k *ax.* 3.
l 6. 1.

Occurrant invicem [b]C B, A D protractæ in G, & jungatur A B. Quia (ob pares [c]A D, D B,) A B D ſive [d]B A D + D B G = recto G B A[a](A B C) = [g]B A D + G, erit G B D [k]= G, & [l]G D = (D B [h]=) A D. Atqui propter parallelas A D, E B, erit DA . FE [e]:: (DC.CF ::) GD. BF. Quare [f]E F = F B.

Notæ.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Naſvæus* atque in præcedente Theoremate; ſcil. è caſubus ſummè obvium adduxit, quando Cathetus B E ad centrum circuli A B C pertineat.

2. Hinc, ut bene monet Cl. *Borellus*, inveſtigare licet duo polygona ordinata & ſimilia, quorum circumſcriptum inſcriptum exceſſu quidem minori dato quovis ſuperet, tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam C E. C A :: B E. (A G) A D + D B; hoc eſt, perimeter polygoni circulo A B C ex ſemilatere B E inſcripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipſo A D + D B circumſcripti. Chordas verò per ſeq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter A C & C E magis ſemper magiſque minuere, eóque rationem diametri A C ad ſemichordam B E elicere. Quippe hinc datur B Eq, & huic par A E × E C, imò datur per Lemma, quod ſequitur, ipſa A E quare E C datur, atque etiam recta A D + D B. Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adſcriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compilator, quiſquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiaſtes fortè *Arabs*, rectas A D, D G pares eſſe jubet, ſuo quaſi fretus opuſculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Iſtud tamen ex Elementis facillimè conſtat.

Lemma

Lemma III.

In circuli ſegmento A B C, *à quovis curvæ puncto* B *ad baſin* A C *agatur perpendicularis* B D, *fiantque* D E = D C, *&* *arcus* B F = B C: *annexa* F A *erit æqualis ipſi* A E. Fig. 263. 264. 265.

Jungantur C B, B F, F E, E B. Eſt igitur E F B ^{c} = F E B, propter æquales rectas F B^{a}, (B C) ^{b}B E. Sed A F B + (A C B^{b}) C E B ^{d} = 2 rectis ^{e} = A E B + C E B. Quare ^{f} A F B = AEB, & (A F B — F E B) A F E = A E F. Unde ^{g} A E = A F.

a 29. 3.
b hyp. & 4. 1.
c 5. 1.
d 22. 3.
e 13. 1.
f ax. 3.
g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Caſus ſecundus, ubi A B C eſt ſemicirculus, *Cl. Ptolemæo* rectas olim circulo applicanti perneceſſarius erat. Lemma tamen, quod τὸ κτ̄ διχοτομίαν appellatur, cap. IX. Libri Primi Μεγ. Συντ. hâc occaſione non conſtat modò, ſed & generale evadit.

Datis ſcil. tam chordis quàm arcubus C A, A F, F C, adeóque ſemiarcu B C, quæritur ipſa B C chorda. Demiſſâ B D ⊥ A C, habes, ut priùs, $DC = \frac{EC}{2} \left(\frac{AC - AF}{2}\right)$. D verò rectus eſt, & B C D ex dato arcu (A C — C B) B A, etiam datus. Quare ſpecie datur (per 40. Dat.) triang B D C. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) ſed & magnitudine (2. Dat.) rectæ B C, C D. Fig. 264.

2. Rurſum ſocors eſſe mavult *Abu'lHaſan*; (iſtum enim λέξεως pravatæ inſimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, omiſſis reliquis caſum medium oſtentare.

Lemma IV.

Super A C *ejuſque ſegmenta* A D, D C *deſcribantur tres ſemicirculi* A B C, A E D, D F C, *&* *fiat* D B ⊥ A C: *erit figura* (A B C F D E A) *trium ſemicirculorum peripheriis intercluſa, quam* Ἄρβηλον *vocat Archimedes, circulo circa* B D *æqualis.* Fig. 266.

Nam A Dq + D Cq + (A D × D C bis ^{a}) : D Bq ^{b} = A Cq. Súntque ^{c} circuli inter ſe, ut quadrata diametrorum. Quocirca ^{d} ſemicirculus A B C æquatur circulo circa diametrum B D, una cum binis

a cor. 13, 17. 6.
b 4. 2.
c 2. 12.
d ax. 7.

[c] ax. 3. binis ſemicirculis A E D, D F C: unde [c] Arbelon *Archimedëum*, hoc eſt, ſemicirculus A B C minus ſemicirculis A E D, D F C par omninò erit circulo circa B D deſcribendo.

Notæ.

1. Cl. *Borellus* iſta verbis ſuis adnotat.

" Hæc forſan eſt una earum propoſitionum quas *Pappus* legit in " libro antiquo de menſura *Arbeli*, ſeu ſpatii à tribus ſemicircumfe- " rentiis circulorum comprehenſi, ut ait *Proclus*: quæ quidem ele- " gantiſſima eſt, ejuſque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* origi- " nem extitiſſe puto. Eſt enim *Hippocratis* Lunula ſuperficies plana " à quadrante peripheriæ circuli majoris, & ſemiſſe peripheriæ cir- " culi ſubdupli comprehenſa. Arbelus verò recentiorum eſt ſpatium à " triente & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulo- " rum æqualium comprehenſum; & hiſce duobus ſpatiis facilè qua- " drata æqualia reperiri poſſunt. At Arbeli *Archimedis* & *Procli* huc- " uſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari cir- " culus prædicto ſpatio æqualis. *Vide jam Viëtam in Reſponſis.*

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus ſeu ſcalprum Sutoris, quâ formâ ſemper fuit. Unde pervetus Gloſſa, Ἄρβηλον, Sicila: & Etymorum Græcanicorum conſarcinator, Ἄρβηλον, σμίλιον σκυτικὸν περιφερές· ἔστι δὲ καὶ ὅπλον. Imò ante iſtos Scholiaſtes *Nicandri* paulò diſertiùs, Ἄρβηλοι δὲ λέγονται κυκλοτερῆ σιδήρεια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Hæc tamen obiter; alia jam me Matheſis diſtinet. Interpreti autem Arabi اربلوس *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Græcâ*.

3. Hoc quartum Theorema ex *Pappi* inventis fuiſſe exiſtimo, quo ad propoſitionem ſequentem, quæ ſubtiliſſima eſt & Sene *Siculo* digna, via certior amplior que pateret: nec adeò *Hippocrati Chio* Meniſcos quadrandi cauſam dediſſe aliquam, quin ipſum potiùs abs antiquiſſimo illo Tetragoniſmo quàm opportunè ortum fuiſſe. Ait enim *Pappus*, quamprimùm expoſuerat Antiquam illam Propoſitionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedæorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri ſui Quarti, (quod minimè diſcrepat ab hoc Lemmatio,) —Δειχθήσεται δὲ τὰ πρότερον λαμβανόμενα.

Lemma V.

Fig. 267.

Super A C *ejuſque ſegmenta quavis contigua* A D, D C *deſcribantur tres ſemicirculi* A B C, A E D, D F C, *ſitque* D G $\perp$ A C: *pares invicem erunt circuli* B H E, L F N, *qui Arbelo* A B C D *inſcripti, tam perpendicularem* G D *quàm ſemicirculos contingant in punctis* H E B, L F N.

Duc diametrum H I: hæc autem [a]æquidiſtet A C, ob [b]rectam D H I [c]$=$ A D H, atque connexa B I $+$ I A [d]recta eſt. Tum conveniant A B, D G in G, convenient etenim [e]propter B A D $+$ ADH $<$ 2 rectis: adjuncta B H $+$ H C, & recta eſt, & ad [f] A G perpendicularis, atque [d] I E $+$ E D, & A E $+$ E K etiam rectæ. Eſt autem [c]G D $\perp$ D A, & juncta C K $\perp$ K A, quare producta C K G recta erit. Quoniam verò E D $\parallel$ C G, propter rectos [f] A E D, AKC, erit [g]A D. I H :: (A G. G I ::) A C. C D. adeóque [k] A D $\times$ D C $=$ A C $\times$ I H, & argumento pari A D $\times$ D C $=$ A B $\times$ L M. Æquantur igitur inter ſe diametri I H, L M, & [h]circuli ipſi I E H, L F M. *Q. E. D.*

[a] 28. 1.
[b] 19. 3.
[c] *hyp.*
[d] *lem.* 1.
[e] 29, 32. 1.
[f] 31. 3.
[g] 2. 6.
[h] 2. 12. *ult.* 1.
[k] 16. 6.
[l] *v. ſchol.* 1.
[n] 27. 3.
[o] 32. 1.
[p] 14. 1.

Scholia.

1. Sive *Græcus* ille, qui hæc Lemmata primus collegit, ſive potiùs *Arabum* aliquis, quo C G rectam lineam eſſe oſtenderet, citat Opuſculum ſuum de Trigonis Rectangulis. Inde verò *Ali Abu'lHaſan* hoc adjumenti accepit. *v. fig.* 271. (*ſive ſchema primum Borelli, ad paginam.* 393.)

B C $\perp$ A G, quod in triang A B C per F occurſum perpendicularium B E, C D tranſit. Junge D E. Circulus A D F [f]ibit per E, ob rectum [e] A E F. Æquantur autem [n]D A F, D E F, atque [n] D E B, D C B, hoc eſt, B A G, D C B: & B communis eſt. Unde [o] AGB (C D B), [e]$=$ recto A G C. Recta [p]igitur eſt C B, ſive in ſchemate *Archimedeo* C G.

2. Deinde Adnotator *Naſvæus* cæteros caſus hujuſce quinti Theorematis ad mentem *Abi Sahl Cûhenſis*, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Caſus ſecundus. Vel ſemicirculi A P N, O P C ſe mutuò ſecent in P. Sitque D P $\perp$ A C: æquales invicem erunt circuli H E B, MFL, qui ſemicirculos & perpendicularem contingunt.

Æqui-

Fig. 268. Æquidiſtant H I, A C, & agantur A B, A H K [a] tranſeuntes per
a *lem.* 1. I, E. atque conveniant A G & D P in G. Dein jungatur recta [b] C K
b + K G, & I N + C B [a] tranſeuntes per E, H.

c 31.3 : 28.1. Propter parallelas [c] C K N I, eſt [d] C A. C N :: (A G. G I ::) A D.
d 2.6. H I. adeóque [e] C N × A D = C A × H I. Verùm C D × D O =
e 16.6. [f] D Pq = A D × D N, atque [c] C N. D A :: (N D. D O ::) [g] C N.
f *cor.* 13.17.6. O A. Quare [e] C D × O A = D A × C N [h] = C A × H I. Pariterq;
g 19.5. C A × L M = C D × O A. Unde æquantur & diametri L M, H I,
h *ut priùs.* & circuli [k] M F L, H E I.
k *ult.*1 : 2.12.

Caſus tertius. Vel ſemicirculos jam disjunctos A E N, O F C tangant partes rectæ D F, D P: æquantur circuli H E B, M F L, qui tam ſemicirculos quàm perpendicularem à tangentium occurſu (D) erectam contingunt in punctis E, B, H, & F, R, L.

Æquidiſtent A C, H I, L M diametri, & jungantur C B, I N, rectæque A H K, C G tranſeuntes per H, E, & K; quia [c] C G ‖ C N, erit
[d] A D. H I :: (A G. G I ::) A C. C N, adeóque A D × C N = A C
l 36.3. × H I. Ac pariter C D × A O = A C × L M. Eſt autem [l] C D ×
D O = (D Qq = D Pq) A D × D N, atque C D. A D :: (D N.
m 18.5. D O ::) [m] C N. A O. Quocirca A D × C N [c] = (C D × O A) [h] =
A C × H I = A C × L M = C D × O A. Pares igitur invicem ſunt diametri L M, H I, circulique [k] L F M, H E I.

Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, *qui tres ſemicirculos ſuper* A C, A D $= \frac{r}{s}$ D C, & *ipſam* D C *deſcriptos contingit, diameter* G H *diametro* A C *æquidiſtet; quæratur autem proportio diametrorum ad invicem.*

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C, item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O ⊥ A O, & H P ⊥ A C.

Et (propter H G, D K, D I ‖ A C, A B, C B) erit O P. P C :: G M. M C :: A D. D C :: A L. L H :: A O. O P :: O P. P C, hoc eſt, $\frac{r}{s}$ P C. P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,

$$\frac{r^2\,PC^2}{s^2\,PC} + \frac{r\,PC}{s} + PC.\frac{r\,PC}{s} :: AC.\ PO = GH.$$

Ex. gr. (ſic enim vult Arabs) ſit P C = 4. Erit O P = 6, O A = 9, adeóque diam. A C . G H :: 19 . 6.

Adnotata in Lemma V & VI.

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis aſſumptíſque tranſcriptum eſt, quâ arte illuſtrius eſſet id quod ſequitur.

Præmonet adeò, priuſquam oſtenderet principem illam veteremquè propter quam appellitat ex vett. membranis, Libro *IV.* Floridorum *Prop. XIV.* eiſdem poſitis quæ in Schemate noſtro 270, & ab α deductâ $\alpha\mu$ $\perp$ A C & = G O, eſſe μD . $\frac{1}{2}$HG :: A D — D C . A D + D C.

Rectæ etenim ſunt [a] A E H, G E D, C F G, D F H; ſimiliáque trig. [b] D E A, D O G, itemque D H P, D F C, quare A D . D E :: G D . D O, & A D O = E D G: pariter D C . D E :: H D . D P, & C D P (= HDE = EDG) = ADO.

Unde AD . DC :: PD . DO. & componendo convertendoque AC . AD—DC :: PO = GH . PD—DO :: Pμ = $\frac{1}{2}$ G H . $\frac{1}{2}$ PD — DO. *Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter ſim. trigona D O G, (DEA,) HPA, erit D O . O G :: H P . P A, & D O * P A = G O * P H = HPq = Q. $\alpha\mu$.

2. Imò, quia C D . D A :: O D . D P. erit componendo tam AD . AC :: PD . PO & diam. AD * (PO) GH = PD * AC. quàm CD . AC :: OD . PO. & diam. CD * (PO) GH = DO * AC.

§ 2. Deinde *prop. XVII. l.* 4. quæ decimam ſextam ejuſdem adjuvat, ut D H q . H I q :: A C . C D. Ponantur eadem quæ in Figurâ 267. fiatque I O $\perp$ A C, Rectæ gr. ſunt [n] H E A, I E D, & propter ea C A * A O = [a] (coeuntibus D, P.) A D q. [b] A C . (A C — A D) D C :: A D . (A D — A O) D O = H I :: (ob ſim. trigona [c] A E D, H E I) DE . E I :: [h] D E q . E H q :: [f] D H q . H I q. Eſt etenim propter I H D [i] rectum, & [k] H E $\perp$ D I; [g] D E . E H :: H E . E I :: D H . H I.

Hinc ſtatim conſtat horum Lemmatum quintum, viz. [l] AC . DC :: $\odot$ circa D H . $\odot$ circa H I pariter, A C . A D :: $\odot$ circa D H . $\odot$ circa L M. Æquanturque [m] circuli ad H I, L M. Quod ex *Pappo* comprobatum volui.

a *Lemma* 1.
b 31, 3. 32, 1. & 4. 6.

a *per preced.*
b 17. 6 : 19. 5.
c 34. 1. *eſt.*
d 4. 6.
e 31. 3 : 29. 1.
f 22. 6.
g 8. 6.
h 20. 6.
i 18. 3.
k 31. 3.
l 12. 2.
m 19. 5.
n *Lem.* 1.

§ 3. Propoſitio autem illa Antiqua & *Archimedea*, quam vocant, talis erat referente *Pappo lib.* 4. *prop. XVI.*

Tres ſemicirculos in ſpatio *Arbelico* tangat circulus G F H, ipſum verò binóſque ſemicirculos alter circa N etiam tangat, atque ita porro. Erit $\alpha\mu = GH$, & $QN = 2RI$, &c. juxta naturalem numerorum ſeriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

a § 1. *ſch.* 1° Æquantur [a]C A O, P A D, atque A C P, O C D, unde [b]AD.
b 16. 6. A C :: A O. A P, necnon A C. C D :: O C. C P. Quare, [d]A O.
c 17. 5. (P A—A O) O P :: A D. D C [c] :: O P. P C, & [e]O Pq = A O ×
d 19. 5. P C [a] = Q: αμ. Ergo [f] $\alpha\mu = (OP)$ [g]= G H.
e 17. 6.
f *ult.* 1. 2. Et, quia [h] $\frac{2}{1} = \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$ 1 erit $QN = 2RI$.
g 34. 1.
h 15. *Papp. l.* 4. Et ſic deinceps.

3. Quinimò ſi fuerint A C, D C in fig. 267. inter ſe ſicut numeri quadrati, [i] erit D H commenſurabilis diametro H I, aliàs non. Nam 9. 10. per § 2 univerſè, $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$. Sit igitur $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{1}$, erit $DF = 2HI$: pariter $QN = 3RI$, &c. juxta vulgatiſſimam numerorum conſequentiam.

4. Quæ eſt *Pappi* propoſitio *XVIII.* Manifeſtum etiam eſt, ſi circuli *f*, *g*, *h*, & ſemicirculos A D E, A B C, ſéque invicem tetigerint, fueritque Cathetus *fn* æqualis radio, fore $go = 3gi$, & $hp = 5hq$, &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3. $\frac{fn + 2fn}{diam.} = \frac{go}{2gi} = \frac{3}{2}$, & $go = 3gi$, &c. (vide fig. 282. ſive illam *Pappi* ad *XVIII. pr. lib.* 4.)

Lemma VII.

Fig. 272. *Circulus* A B C *quadrato* A C *circumſcriptus duplus eſt inſcripti circuli* E F G.

a 34. & *ult.* 1
b 47. 1.
c 2. 12.

Ductâ [a]etenim diametro E G ∥ B C, erit diam. B Dq [b]=(2 BCq) 2 E Gq, & circulus circuli duplus.

Adnotat *Abu'lHaſan Naſvaus*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, tritum illud,

Vis $\frac{r}{s}$ polygoni ſive circuli dati E H G. Habes latus aut diametrum EG, & $\frac{r}{s}$EG, necnon (per 13. 6.) quadratum par rectangulo $\frac{EG^2 r}{s}$. unde, EG. $\frac{EG r}{s}$ :: EG². $\frac{EG^2 r}{s}$ :: [e] circulus datus quæſito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli ſecante AC *ſtatuatur* BC *par radio, & per circuli centrum* D *agatur* CE: *arcus* AE *triplus eſt ipſius* BF. Fig. 273.

Ductis enim EG ∥ AB, radiiſque DG, DB: erit DGE [a] = DEG $\left(\frac{GDF}{2}\right)$ [c] = C [a] = FDB [d] = $\frac{1}{3}$ GDB, & arcus BF [e] = ($\frac{1}{3}$ BG) [f] $\frac{1}{3}$ AE, ob AGE [c] = GAB. unde conſtat propoſitum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ EB, erit (BDC) [a] C = 2 DEB [a] (E + EBD): unde ABE [b] = C + E [b] = 3E, & arcus AE [e] = 3BF.

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ τριχοτομίαν, quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè conſtruatur, omninò ſuperat. Id tamen facili opere præſtat *Solida*, multóque adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ AB, CD *ſeſe ad angulos rectos ſecantes, intercludunt arcus* AD + CB, *pares arcubus* AC + DB. Fig. 274.

Agatur diameter EF ∥ AB, eſt igitur GD [a] = GC, AE [b] = BF, & AE + AD [c] = EC. unde ſemicirculus CF + EA + AD = CF + FB + AD [e] = AC + DB.

a 3. 3.
b cor. 26. 3. & conſtr.
c cor. 28. 3.
d ax. 1. def. 17.
e ax. 7.

Lemma X.

Circulum AEB *tangant rectæ* CA, CB, *ſecent verò* CD, *& huic parallela* BE, *& connexa* AE *ſecanti* CD *conveniat in* F: *Cathetus* FG *biſecabit ipſam* EB. Fig. 275.

Junge AB, eſt igitur CAB [a] = (AEB) [b] AFC, & D communis utrique triang [b] CAF, AHC; unde [c] FC. CA :: CA. CH, &

a 33. 3.
b conſtr. 29. 1.
c 32. 1: 4. 6.

Digitized by Google

& ^{d} F C × C H = C Aq ^{e}= C Bq. Quia ^{f} verò F C. C B :: C B, & < ^{g} D communis, erit < ^{g} C F B = ^{g} (C B H ^{h}= G A B ^{k}) A F C. Sed (C F A) F E B ^{k}= F B E ^{b}(C F B), angulíque ^{l}ad G recti, atque latus G F commune; quare E G ^{l}= G B.

d 17.6.
e *cor.* 36.3.
f *cor.* 17.6.
g 6.6.
h 5.1.
k *ax.* 1.
l 26.1.

Lemma XI.

Fig. 276.

Circuli diameter A F *poteſt quadrata ex ſegmentis binarum chordarum* A B, C D, *ſeſe ad angulos rectos ſecantium in* E.

Jungantur A C, A D, C F, D B. Propter A E D ^{a}= A C F, & A D C ^{b}= A F C, erit C A F ^{c}= D A E, & tam curva quàm recta C F ^{d}= D B. Unde AFq ^{f}= C Fq ^{e}(D Bq) + A Cq, hoc eſt, ^{f} D Eq + E Bq + A Eq + E Cq.

a *ax.* 12 31.3.
b 27.3.
c *cor.* 32.1.
d 26, 29.3.
e *ult.* 1.
f 47.1.
g *cor. ult* 6.

Schol.

Ali Naſveus hoc modo: annexis A D, D B, B C. In triangulo D E B, E = recto ^{c}= B + D, & arcus D A + B C ^{g}= ſemicirculo. Poteſt ideò diameter utraque ^{d} D Aq + B Cq, hoc eſt, quadrata ex A E, E D, E B, E G.

Lemma XII.

Fig. 277.

Semicirculum tangant C D, D E, *rectaque* C G *tranſeat per* F *interſectionem ſubtenſarum* D B, E A, *qui tactus* D, E, *& diametri terminos* A, B *connectant. Erit* C G ⊥ A B.

Junge D A, E B. Erit ang. ^{a}rectus A D B ^{b}= D A B + D B A ^{a}= B E F. Et (C D B) ^{d} D A B + A B F + F B E = D A B + (C E F) ^{d}A B E ^{c}= B E F + F B E ^{b}= D F E ^{c}= C D B + C E F. Unde C F ^{f}= C D: atque eſt D A G ^{d} (C D F ^{g}= C F D) + D F G = 2 rectis = ^{a}recto (A D F) + F G A. Quare ^{k} C G ⊥ A B.

a 31.3.
b *cor.* 32.1.
c 2 *ax.*
d *hyp.* & 32.3.
e *ax.* 1.
f *ſchol.*
g 5.1.

Schol.

1. In Demonſtratione ut pares ſint C F, D C, provocatum eſt ad opuſculum, quod hodie nuſquam eſt, *de Tetrapleuris*: ſupplet tamen τὸ ἐλλιπὲς *Abu'l Haſan* Adnotator hunc in modum.

Vis C F > D C = C H. Eſt igitur (connexis D H, H E,) C D H ^{g} ſeu D H C ^{l} > D F C, & C E H ſive C H E ^{l} > C F E: quare

h 13.1.
k 10 *def.* 1.
l 16.1.

D H E

$DHE = CDH + CEH$ majore $CDF + CEF$, pars toto: Rurſum ais $CF < DC = CG$. Erit pariter (jungenti DG, GE,) DGE, hoc eſt, $CDG + CEG$ minor $CDF + CEF$, totum parte. Ergo $CF = CD$.

2. *Cl. Borellus* Methodo idem directâ commonſtrat, hâc puta.

Fac $CN = CE$, & adjunge NE. Anguli igitur [m] plani NDFE m *ſch.* 32. 1.
valent quatuor rectos, atque anguli [n] oppoſiti EFD $(CDF + CEF)$ n *ax.* 3.
$+ N$ [g] $(CEN) = FDN + FEN = 2$ rectis. Quare circulus o 19. 3.
ex centro C (ob [o] $CN = CE = CD$) plano NEFD circum- p 22. 3.
ſcriptilis [p] auferet [q] $CF = CD$. q *def.* 15.

Lemma XIII.

Catheti AE, BF, *à diametri circularis extremis* A, B *cadentes, exſecante àdiametro* CD *ſegmenta* CE, FD *invicem æqualia auferunt.* Fig. 278.

Junge EB, & per centrum G adige GI ∥ AE, quæ biſecat [a] CD a 3. 3: 30. 1.
& æquidiſtat ipſi BF. Erit (ob $AG = GB$) EI [b] $= IB$, & b 2. 6.
EH [b] $= HF$. Et HD (HC) minus HE æquales ipſi FD [c] $= FE$. c *ax.* 3.

Lemma XIV.

Super AB *ejuſque paria ſegmenta* AC, DB, *atque ſub interſegmento* CD *deſcribantur quatuor ſemicirculi, & per* E *centrum circulorum* AFB, DGC *pertrahatur*, FG ⊥ AB: *Circulus circa* FG *æqualis eſt figura curvilinea* AFBDGCA, *quam Salinon appellat Archimedes.* Fig. 280.

Sunt enim diam. FGq [d] $(DAq) + CAq$ [a] $= 2\,DEq$ [b] (CEq) a 10. 2.
$+ EAq$ [c] $= \frac{1}{2} ABq + DCq$. Panterque [e] ipſi circuli Quare b *hyp.* & *ult* 1.
[f] ſemicirculi ſuper AB, DC, æquanter circulis ad FG, CA Et c *hyp.* & 4. 2.
[g] Circulus ad FG minus illo ad AC, hoc eſt minus paribus ſemi- d 15, *def.*
circulis ſuper AC, DB æqualis eſt Salino, ſive figuræ à quatuor e 2. 12.
ſemicirculis AB, BD, DC, CA concluſæ. f *ax.* 7
g *ax.* 3.

Nota.

(Salinon) ſive σελινιον Luna eſt, quatenus vultu planiſſimè ſuo appartet, hoc eſt, μηνοειδής. Unde nomen antiquitùs erat puerorum amuletis.

Lemma

Lemma XV.

Fig. 281. *In ſemicirculo* A C B, *ſit* C B *chorda Pentagoni & recta* C D *per arcûs* C A *punctum medium* D *tranſiens diametro* A B *producta occurrat in* E, *atque connectatur* D A *Cathetus* F G *auferet* G F *ſemidiametro circuli parem.*

Junganțur CA;GD,DB,& è centro HD. Eſt igitur (ob [a]CAB $= \frac{2}{5}$ recti) CAD [b] = DAB $= \frac{1}{5}$ recti: utque (2 DAH) [d] DHB $= \frac{2}{5}$ recti. Sed rectus C [e] = G, & FA commune, quare (in trigonis ACF, GAF) AC = [f] AG; necnon (in trigonis ACD, AGD) ob pares angulos ad A, AD commune, & AE = AG, erit [f] ACD = AGD = [g] $\frac{3}{5}$ 2 rect. $= \frac{6}{5}$ recti. atque ACD = [h] DBE, & DBA [k] = DGB. Unde DB = [l] DG.

a Cor. 10.4.
b 17.3.
c 9.5.
d 5, 32.1.
e 31.3.
f 26.1.
g ſch. 22.3.
h cor. 22.3.
k 32.1.
l 6.1.
m ax. 2.

Item quia DHG $= \frac{2}{5}$ recti, & DGH $= \frac{6}{5}$ recti, erit HDG [k] $= \frac{2}{5}$ recti, & DG [l] = GH.

Poſtremò quoniam (in triang. EDB, HDG) BDE [h] = (CAB [a] $= \frac{2}{5}$ recti) GDH, & utprius DGH = EBD, & DB = DG, erit EB [f] = GH, & EG [m] = radio BH.

Coroll. I.

Annexis CH, CG, erunt ACE, HDE, & HCG, GDB trigona iſoſcelia & ſimilia, ſimiliterque poſita & ad baſes ſecta. Nim. duas quintas recti æquant hinc HCB, HCG, GCE; inde EDB, BDG, GDH.

Coroll. II.

Liquet inſup. EC (= CA, chordæ $\frac{1}{10}$ totius circuli) diviſam eſſe in D mediâ ac extremâ ratione, cujus ſegmentum majus ED (= radio DH, ob DBE = DGH,) eſt latus hexagoni ordinat circulo ACB inſcribendi, minuſque DC decagoni, per 9, *e.* 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem ſectas eſſe EG in B, BH in G, & EH tam in B quàm G, EA denique in centro H. Deinde æquantur càm ECB tum $\frac{1}{2}$ GCE parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ ſequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus *Archimedis* de Spherâ prorſus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes deſinunt.

ARCHIMEDIS ΧΑΜΜΊΤΗΣ
SIVE
Liber de Arenæ numero.

ARbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum eſſe. Dico autem non ſolùm ejus, quæ eſt circa *Syracuſas* reliquamque *Siciliam*, ſed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt Autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, ſed nullum dari denominatum numerum poſſe credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, ſi ejuſmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujuſmodi eſſet, ſi univerſa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altiſſimorum montium vertices exæquaret; atque hujus ipſius rurſus alterum multiplicem excogitarent, monimè dubium eſt exiſtimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multúmque ſuperare. Ego verò id oſtendere conabor demonſtrationibus Geometricis quas tu ipſe aſſequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expreſſi traditíque ſunt in iis, quæ ad *Zeuxippum* Scripſimus, nonnullos non ſolùm arenæ multitudinem ſuperare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis eſſet, ſed etiam quæ ipſi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Aſtrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem eſt terræ centrum, ſemidiameter autem eſt æqualis lineæ inter centrum ſolis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Aſtrologis ſcripta ſunt, redarquens *Ariſtarchus Samius* poſitiones quaſdam edidit, ex quibus ſequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem eſſe. Ponit enim ſtellas inerrantes atque ſolem immobiles permanere, terram ipſam circumferri circa ſolem ſecundùm circumferentiam circuli, qui eſt in medio curſu conſtitutus; ſphæram autem inerrantium ſtellarum circa idem centrum cum ſole ſitam, tantâ eſſe magnitudine, ut circulus ſecundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad diſtantiam ſtellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad ſuperficiem. (Vide *Copernic.* revol. *l.* 3. *c.* 15.) Id verò manifeſtò conſtat fieri non poſſe. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad ſphæræ ſuperficiem exiſtimandum eſt. Quare credibile eſt *Ariſtarchum* ita intellexiſſe, *utputa in hypotheſium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notiſque (captu ſanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo eſſet fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo pluſculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheſes.

1. Eſt ſecundùm *Ariſtarchum*, qui inter ſphæras fixarum ſoliſque quàm inertes & defixas globum noſtrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Aſtronomorum Mundus fuit,) ita iſte. ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 ſtadiorum eſſe comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis eſſe *Archimedes* τ' ἀμφιλόγȣ ἕνεκεν) haud ſuperet trecentas ſtadiorum Myriadas, ſitquè ita (per Cyclometrica *Archim.*) diameter terreſtris minor quàm ſtadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur ſolis diameter & terreſtri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem aſſeruerat, *Phidiaſquè* duodecuplam: & demonſtraverat ſanè *Ariſtarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adſervari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui eſſe pluſquam ipſius octodecuplâm.

Obſervationes.

1. *Ariſtarchus* quidem capto ſolis angulo viſuali (quâ in re & manus & viſus & organa nimiùm fallere ſolent,) aiebat ſolis diſcum partem Zodiaci vigeſimam & ſeptingenteſimam ſubtendere: Veruntamen *Siculus* noſter, quoniam Problema ſuum ſubtilius eo quicquam haud poſtulat, obſervavit binos modò angulos, alium quidem angulo ſolis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat obſervandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ ſuper palum verſatilis jaciat Cylindrulus, ſolis jàm exorti oppoſitos ſolum margines viſui ad extremum regulæ poſito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò viſu Cylindrulum tangentes, major fuerit viſuali ſolis angulo ſi viſiò viſio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi priùs erat viſus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ; eæ accurſu ſuo angulum efficient minorem angulo ſolis viſuali, cùm utrinque aliquid ſolaris diſci compareat. Cæterùm magnitudo viſu non minor hac arte inveſtigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, terſi, & æquè craſſi, quorum alter ſit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè ſtatuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis diſtet; ſiquidem viſo non-albo albus juxta varia intervalla promotus diſpareat, magnitudo paris craſſitudinis cum Cylindris iſtis non minor erit diametro viſûs, quod ſuprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum ſolis diſcum à viſu penitus abripit, rectæ quæ à viſu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $<^{o}$ ſolis viſuali. Ita autem deprehenſus eſt angulus ſolis viſualis major eſſe $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios ſtellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Obſervatum eſt 25 papaveres (*μάκωνας*) in rectam lineam diſpoſitos longitudinem digitalem ſuperare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadrageſima: atque conſtet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major eſt latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inſcripti.

Plano per terræ centrum *h*, viſúmque *d* ſecentur, ſole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipſa, & Sol ſecundum circulos *abc*, *def*, & *ſq*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*, *hq* ſecantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem ſtingit, [a] $<$ *hdk* rectus [e], exceditquè [b] terreſtrem diameter ſolis, erit ſole jam prorſus elevato, $<$ *hdk* obtuſus, [c] & $hk > dk$, necnon *rhq* ($<$ [d] *ndt*, angulo ſolis) $< \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta $ab <$ ſubtenſâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656-goni. $kh :: \sqsubset 44 . 7 :: \sqsubset 656 . 104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. $kh :: \sqsubset 1 . 104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh} :: \sqsubset$ ($\frac{1}{1148}$, *i. e.* in integris, $:: \sqsubset$) $\frac{1}{100}$

Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.*
c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Eucl.
e *Obſerv.* 1.
f *cor.* 33. 6.

g Ptol. Alm. l. 1. c. 9. $\frac{1}{100}$: atque ba multò $\sqsupset \frac{bk}{100}$. eſt autem ba diameter circuli ſg,
h 13. 5. quippe (ob aub, bkr, rectos [m] & b communem) eſt [n] $bk . ba$ [i]
i 6. 1. $= bk :: kr . au$: unde [o] $kr = au$, & diameter $(= 2 kr)$
k 28. 5. $= ab$; Eſtque [p] $2 by \sqsupset ab$ ſive $2 ks$, unde $by + ks \sqsupset \frac{1}{100} bk$,
l 15. def. 1. & reliquum $ys \sqsubset \frac{99}{100} bk$, adeòque $bk . ys :: \sqsupset 100 . 99$.
m 3. 18. 3. Quia autem tam br [c] $\sqsupset bk$, quàm $ys \sqsupset dt$, (Scil. junctis
n 4. 6. dy, st, obtuſi [r] ſunt $\angle$ [l] dyz, zst, & [c] $dz \sqsubset yz$ necnon $zt \sqsubset zs$,
o 9. 5. eòque [s] $ys \sqsupset dt$.) erit $\frac{br}{dt}$ (:: [q] $\sqsupset \frac{br}{ys} :: \sqsupset \frac{bk}{ys}$ [t]) $:: \sqsupset \frac{100}{99}$
p hyp. 3.
q 8. 5.
Fig. 284.
r Cor. 16. 3. Præterea in trigonis rectangulis bkr, dkt, quia $kr = kt$,
s 4. ax. ac br $(bq) \sqsubset dt$, erit angulus [d] major $tdk . rbk ::$
t ut prius. $\sqsubset bk . dk.$
u cor. 37. 3. & 15. 5. $\sqsupset br . dt.$ [Compoſitis etenim ad rectos trigonis ktd, kbr,
x 12, 28. 1. ſit $df = bk$, & [x] $fi \parallel kr$, circuli igitur pares circa pares diametros
y ſch. 31. 3. df, bk, [y] tranſibunt per i, r, eritque $\frac{\angle fdi}{\angle rbk}$ (:: [z] $\frac{\text{arcus } fi}{\text{arcus } kr}$) [g]
z 33. 6.
Fig. 285. $:: \sqsubset$ [h] $\frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr} :: \sqsubset$ [n] $\frac{(fd)\, kb}{kd}$. Vel Componantur triangula iſta
ad acutos, b, d, & centro d, intervallo do, deſcribatur circulus
poq, Erit igitur $\frac{\angle kdo}{\angle odt}$ (h. e. [f] $\frac{\text{ſector } pod}{\text{ſect. } oqb} :: \sqsupset$ [q] $\frac{\text{ſect. } pod}{\triangle otb}$)
$:: \sqsupset$ [q] $\frac{\triangle kod}{\triangle otb}$ ſive [l] $\frac{ko}{ot}$; & componenti, $\frac{\angle kdt}{\angle kbr}$ ($:: \sqsupset$ [k] $\frac{(kt)kr}{ot}$),
[n] $:: \sqsupset$ e. $\frac{br}{dt}$.]

Inde [n] $\frac{ndt}{rbk}$ ($:: \sqsupset \frac{br}{dt}$) multò $:: \sqsupset \frac{100}{99}$. Tum, quia ndt (major $\frac{1}{200}$ recti) $rbq :: \sqsupset \frac{1}{200} . \frac{99}{20000}$, h. e. 1001.99, eſt rbq ($\sqsubset$ [l] $\frac{99}{20000}$ recti, h. e. $\sqsubset \frac{1}{202} . \frac{2}{99}$ recti) multò $\sqsubset \frac{1}{203}$ recti. Solis igitur diameter ba major eſt ſubtensâ parti $\frac{1}{812}$ circumferentiæ totius, & adhuc major ſubtensâ $\frac{1}{1000}$ circumferentiæ ſeu latere Chiliagoni Orbitæ ἐνιαυσίᾳ inſcripti.

Coroll.

Hinc autem ſequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem
α 21. 1 α excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inſcribitur, cùm vel
β cor. 15. 4. ambitus hexagoni β æquet tres diametros ſui circuli,) minor eſt mille
diametris

diametris ſolis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut terræ, Diametrum Orbis revolutionis annuæ (quem mundum vocant, minorem eſſe decies mille diametris terræ, multoque minorem γ centrum Myriadibus myriadum ſtadiorum, ſive 10000 × 1000000. γ *hyp.* 2.

2. Τῶν ἀριθμῶν κατονόμαξις.

Novem primi gradus ſeu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præſens inſtitutum abundè ſufficit) progredienti vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Iſti verò numeri commodè ſatis exprimi ſolent, notis puta diſtinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Dein novem gradus, qui proximè ſequuntur incipiendo à nono ſeu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipſius gradus excepto itidem primo, Octas ſecunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut $\begin{matrix} \iota = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\kappa.\lambda. \\ \text{ſeu } 1.b.b^2.b^3.b^4.b^5.b^6.b^7.b^8.b^9.b^{10} \end{matrix}$ & aliqui δ, θ ex eadem analogeâ ſeſe multiplicaverint, factus inde numerus ($\delta \times \theta =$) χ æqualis erit ipſi λ, qui tantum diſtet à θ majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe [a] $\begin{matrix} \alpha.\beta :: \theta.\iota \\ \beta.\delta :: \iota.\lambda \end{matrix}$ & $\alpha.\delta :: \theta.\lambda$: quare [b] $\theta\lambda$ ſeu $\chi = \alpha\lambda =$ [c] λ. Patet etiam $\lambda - \iota$ diſtare ab unitate quantus eſt numerus ex utriſque conflatus, quibus ſe invicem multiplicantes δ, θ ab unitate abſunt. Sunt equidem $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ quot ipſe θ ab unitate diſtat, at ι, κ, λ, ſunt uno minores, quàm quibus δ diſtat ab unitate: etenim unà cum θ totidem erunt.

a *hyp.* & 14. 7.
b 19. 7.
c 5 *ax.* 7.

His igitur partim poſitis, partim verò demonſtratis, quod jam propoſitum eſt, oſtendemus.

Propoſitio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ ſtellarum inerrantium ab *Ariſtarcho* poſitæ, minor eſt mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abeſt ut ſit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris eſt ad digitum :: (1.40 [a] :: 40.1600 ::) 1600.64000; Sphæra ex diametro digitali non [b] continebit plusquam 64000 papaverum globoſorum, ſive [a] arenarum 64000 × 10000,

a *Obſerv.* 2.
b 18. 2.

Digitized by Google

10000, hoc eſt, ſex myriades myriadum quatuorque myriadum millia $=$ ſex n^{ii} $+$ quatermillibus myriadum α^{i} :: atqui $\sqsubset$ decem α^{ii}. Numerus autem arenarum, quas capit ſphæra ex diametro centum digitorum, adeóque [b] ſphæræ ex digitali diametro multiplex centum myriadibus, minor eſt 1000000 × decem n^{ii}, hoc eſt, minor mille myriadibus α^{ii}: Nam 10 α^{ii} × 1000000, qui fit ex 10 n^{ii} termino decimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino ſeptimo [c] erit progreſſionis iſtius terminus decimus ſextus; octo autem primi termini pertinent ad n^{i}, & octo ſequentium ultimus valet mille myriades ℛ n^{ii}. Rurſus numerus arenarum, unà cum monade quibus conſtat ſphæra ex diametro decies mille digitorum, qui quidem ſtadium ſuperant, hoc eſt, ſphæra [b] centum myriadibus multiplex ſphæræ ex diametro digitali, minor eſt 1000000 × mille myriades n^{ii}, hoc eſt, minor decem myriadibus ℛ n^{iii}, ſive progreſſionis iſtius termino $(16+7-1=^{c})$ 22^{do}, quandoquidem octo primi termini cum unitate pertineant ad n^{i}, octo ſequentes ad n^{ii}, & cæterorum ſex ultimus deſinat in decem myriades n^{iv}. Numerus etiam arenarum, quibus repletur ſphæra centum ſtadiorum diametrum habens adeóque ſphæræ ex diametro unius ſtadii multiplex myriadibus centum, minor erit 1000000 × decem myriades n^{iii}, ſive progreſſionis termino $(22+7-1)$ 28^{vo}, hoc eſt, minor mille unitatibus ℛ n^{iv}. Pariter ſphæra ex diametro denum millium ſtadiorum, adeóque ſphæræ centum ſtadiorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet arenarum numerum minorem 1000000 × 1000 unitates ℛ n^{iv}, ſive termino progreſſionis $(28+7-1)$ 34^{to}, hoc eſt, minorem decem unitatibus ℛ n^{v}. Dein ſphæra ex diametro centum myriadum ſtadiorum continet arenas pauciores quàm 1000000 × 10 unitates ℛ n^{v}, ſeu quantitatem termini 40^{mi}, hoc eſt, pauciores quàm mille myriades ℛ n^{v}. Item ſphæra ex diametro decies mille myriadum ſtadiorum habet arenarum numerum minorem 1000000 × mille myriades ℛ n^{v}, ſeu termino 46^{to}, hoc eſt, minorem myriadibus decem ℛ n^{vi}: Et ſphæra ex diametro centum myriadum myriadum ſtadiorum, quæ [d] orbis annui diametro major eſt continet arenarum numerum minorem 1000000 × myriades decem ℛ n^{vi}, ſive termino 52^{do}, hoc eſt, minorem mille unitatibus ℛ n^{vii}. Ergo mundus veterum Aſtrologorum ſeu orbis revolutionis annuæ non capit tot arenas quot ſunt mille unitates ℛ n^{vii}. Denique numerus arenarum quæ repleant fixarum ſphæram *Ariſtarchicam*, minor eſt mille myriadibus ℛ n^{viii}. Quoniam enim diametri terræ, mundi Aſtrologorum, orbiſque fixarum fuit ÷÷ [e], oſtenſáque eſt diameter mundi iſtius

c *Lemma* 3.

d *Cor. lem.* 1.

e *Hyp.* 1.

iſtius minor 10000 diametris terræ, erit etiam fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis [b] minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit ſphæra æqualis fixarum orbi juxta *Ariſtarchum*, minor erit 1000000000000 × mille unitates ℳ n^{VII}, ſive progreſſionis termino (13 + 52 — 1) 64^{to}, qui eſt gradus octavus ℳ n^{VIII}, minor mille myriadibus ℳ n^{VIII}. Patet ergo propoſitum. Hæc autem, rex *Gelo!* quamplurimis quidem, qui Mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa diſtantias & magnitudines terræ, ſolis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimavi.

ARCHIMEDIS EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* ſcripta, partim ab illo facta; ſed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc ſenſum narrat. Cùm *Hiero Syracuſarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; poſteaque intellexerat Artificem, Auri parte ſurreptâ, Argentum æquali pondere ſubſtituiſſe; *Archimedem* ea de re conſuluit. Ille autem Balneum ingreſſus, effluentem aquam conſpicatus, hinc anſam cepit determinandi, quantum Auri ſurreptum fuerat; ſtatimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Εὕρηκα, Εὕρηκα, domum ſe contulit. Nempe, cum Aurum, ejuſdem ponderis, minoris molis ſit quàm Argentum; moleſque corporis irregularis non aptiùs colligi poſſit, quàm ex Aquæ menſurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum ſpatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejuſdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum eſſe, quantum Auri & quantum Argenti miſcuerat Artifex.

Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum inſtituerit, & quantâ ſubtilitate ſingulorum molem rimatus eſt, non exponit *Vitruvius*; contentus rem craſſiùs expoſuiſſe, quam ipſam (puto) executus eſt *Archimedes*. Et, ſiquid ea de re ſcripſit *Archimedes* ipſe, periit. Alii alios modos expoſuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in ſuo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptiſta Hodierna* in ſuo *Archimede Redivivo*, impreſſo *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644. Italicè.

Calculus ſic commode inſtituitur. Pondus Auri quantum eſt Coronæ, occupet ſpatium L; Pondus Argenti huic æquale, ſpatium $L + M$. Pondus Coronæ, ſpatium $L + N$. Ergo, ut N ut ad M, ſic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe ſpatii incrementum M prodiret ſi totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, oſtendet quantum jam commutatum ſit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ ſtupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, ſimilibuſque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujuſmodi figuram accommodant: & ſpeciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis inſtrumentis) ſtupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujuſmodi, ex conjecturâ ſupplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribaſio*, recenſet *Archimedis* Triſpaſtum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Neſcio an 50000 legendum ſit, propter πεντεμυριομεδίμνον.) Figuraſque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Balliſtas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis inſtar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, naveſque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum eſt.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύρια memorat, ſeu ſpecula Uſtoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu poſthumo, *Del Specchio Uſtorio*, (*Bononiæ* impreſſo in 4°, Anno 1650.) Italicè fuſius agit.

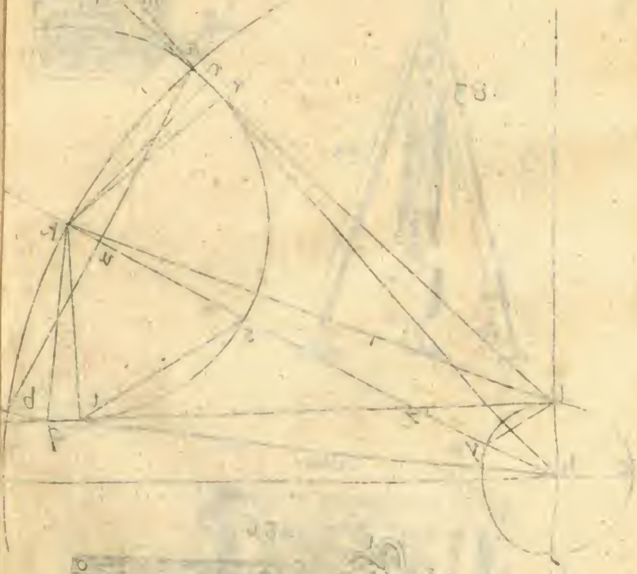
7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroſcopica: nec hujuſmodi tantum Inſtrumenta conſtructa, ſed & libros ab *Archimede* conſcriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedi* Σφαιροποιΐαν memorat; ſeu machinam Cœleſtium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exſtet ab *Archimede* conſcriptum; non niſi ex dubiis conjecturis ſuppleri poſſunt.

FINIS.

Digitized by Google


n
x
y
y
v
d
r
t

ERRATA ſic corrigantur:

Pag	Lin	In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	X *pro* H & G.
3	2	Z vel Y *pro* X.
8	*pe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	F E ⊏— D E *pro* G F ⊏— D E.
16	17	DEq . EB x BA :: Tq . Mq *pro* DEq . EB x AE :: Mq . Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4,5 6,7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine,* D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.
54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
66	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33	H F x F E *pro* H F x F D.
68	34	
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	ſectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	LSH *pro* LSF, & ALN *pro* ALM.
74	22	*Deeſt* + *inter* AEq & CX x XA.
75	*pe.*	*Deeſt* + *inter* EXq & CE x ED.
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 22.6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
85	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe.*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur,* FN.FL::NK.KL. & (ob ſect. AMD) NK.KL :: NM . ML quar FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Libri I. *Prop.9.nota* f, *pro* 17.6 *lege* 16.6. *pr.*16.*n.*a, 13 hujus *l* 12 hujus. *pr.*20.*n.*c, 3.6 *l.*1.6. *pr.*33.*n.*c, 4.*l* 4.2. *pr.*38 *n.*c, 21 hujus *l.*37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.*37 hujus. *pr.*45.*n.*f, 7.1 *l.*7.5. *pr.*45.*n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5.

Libri II. *Prop.2.nota* g, *pro* 6.5 & 3 ax. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g, *deeſt hæc citatio* (17 ax. 1.)

Libri III. *Prop.* 4. *nota* a, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.* 8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n.* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in ſingulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.*20. *n.* c, 16.3 *l.*4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.*34 *n.*c, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37.*n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.*44.*n.*b, & *pr.*45.*n.*c, *pro* 15.6 *l.*16.6. *pr.*56.*n.*p, ex 2 vel 4.8 *l.* 2 vel 4.3.

Libri IV. *Prop.*14 *nota* a, *pro* cor.14 hujus *lege* 5 hujus *pr.* 15.*n.*b, 36.1 hujus *l.*39.3 hujus. *pr.* 21. *n.*a, 6 hujus *l.*8 hujus. *pr.* 21. *n.*b, 15 hujus *l.* 17 hujus.

In Schematis.

Fig.14.*deeſt linea* F G. fig. 30 *deeſt* D *ubi* EH *occurrit ſectioni.* fig.136. *pro* H *lege* B. fig.148 *deeſt* D *ubi lineam* AC *biſecat* KB. fig.176.*deeſt* E. fig. 194. *deeſt ubi* Y *ubi* LX *diametro occurrit.* fig.276.*deeſt* E *ubi* DK *ſectioni occurrit.*

APOLLONII
CONICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè Demonstrata.

Per *ISAACUM BARROW*,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*,
in vico **Little-Britain.** 1675.

Digitized by Google

De THEODOSIO, ex VOSSIO de Scientiis Mathematicis.

In temporibus Ciceronis ac Pompeii claruit Theodoſius Tripolites qui partem Geometriæ de figura Sphærica libris tribus utiliſſimis egregiè excoluit.

E*os Græcè edidit Latinèque vertit ac* Lutetiæ Wechelii *typis mandavit* Joannes Pena *Mathematicus Regius. Compluria ex eo* Ptolomæus *hauſit &* Ptolemæo *recentiores*, Pappus, Proclus, Theon, *multa item; ſed, diſſimulato* Theodoſii *nomine; exſcripſit* Vitellio, *ob quæ tamen maximè fuit admirationi.* Arabes *etiam in Linguam ſuam tranſtulerunt. Ex Arabico verò Latinè verſus fuit à* Platone Tiburtino, *ut auctor eſt, qui de Speculis uſtoriis ſcripſit. Eaqne interpretatio* Venetiis *excuſa, ante annos jam* 155 *eo nempe à quo & Almanſoris Judicia ex Arabico Latine verſa ſunt. Sed immane quantum intereſt inter genuinum* Theodoſium *& Arabicè loquentem, uſque adeò ut ob tam multa addita alius videri poſſit, quæ res compulit* Joannem Penam *regium apud Pariſienſes Mathematicum, ut, non contentus Græcè edere, quod per ſe magnam laudem merebatur, ex Graco etiam optima fide faceret Latinum Pariſiis editus* 1558, *& poſt eum* Chriſtophorus Clavius, Herigonius, *& nuperrime* Guarini *in* Euclide *adaucto, &* Claudius Millet *de Chales in curſu Mathematico hoc opus illuſtrarunt. Quanquam*

antem

autem Theodoſius *hic* Tripolites *inſcribatur, eòque nomine à* Suida *etiam memoretur: non dubium tamen quin idem ſit ac* Bithynus *ille* Theodoſius, *profeſſione philoſophus; quem Mathematicis diſciplinis uti & filios ejus, præſtitiſſe, ait* Strabo, *lib.* 12. *Ut* Pompeii *magni temporibus vixiſſe videatur. Nec obſtat quod dicatur* Bithynus. *Nam fortaſſe ex* Bithynia, Tripolin *in* Africam *abiit, atque ibi ſedem fixit. Quomodo* Hipparchus *eidem* Straboni *eſt* Bithynus; *qui* Ptolemæo, *& aliis, eſt* Rhodius. *Scripſit etiam* ϖεϱὶ οἰκήσεων, de habitationibus, *cujus Argumenti* 12 *Propoſitiones dedit* Merſennius *in Synopſi Mathematica, pag.* 246, *& tribus ſequentibus; & libros* 2, ϖεϱὶ ἡμεϱῶν καὶ νυκτῶν, de diebus ac noctibus. *Quæ Græcè in Bibliotheca Regia* Lutetiæ, *adſerſantur, Latinè* Argentorati *edi curavit* Petrus Daſypodius, *anno* 1572.

THE-

De Apollonio Pergæo, ex Voſſio de Scriptoribus Mathematicis:

Proximæ poſt *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant eſt Apollonius Pergæus, Claruit enim ſub Ptolomæo Evergete.

N*Atus eſt Pergæ, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus quod dixi auctor eſt* Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Aſcalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro ſexto refert, ut ob conicam hanc ſcientiam à ſuæ ætatis hominibus nuncupatus ſit* magnus Geometra, Euclidis *diſcipulos, quod & ipſum ætatem indicat*, Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepiſſet; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illuſtrare, ac totidem alios adjungere: ut in univerſum conicorum eſſent libri viij: ſicut auctor eſt Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.* Pag. 54.

Atque eodem libro alia quoque ejuſdem Apollonii *memorat; videlicet libros duos* περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis ſectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de ſpatii ſectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ ſectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac ſimiliter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἐφεκτικοὺς, in ſe ſolis conſiſtentes: *alios* διεξοδικοὺς, extra ſeſe tendentes. Pag. 55.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non eſſe Apollonii Pergæi, *ſed* Archimedis *putarent. Exiſtimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium conſignaſſe* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea ſciret necdum edita eſſe ab auctore, involâſſe in illa, proque ſuis edidiſſe. Ac videtur id poſſe ipſius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipſe operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, *ante propoſitionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonſtratum eſſe in libris Conicis. Niſi quis cenſeat, reſpici* Euclidis *quatuor Conicorum libros quorum* Pappus *mentionem facit in ſeptimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, ſi alienum opus ſignaret* Archimedes *non ſic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonſtraſſe. Et ſanè* Archimedi *non fuiſſe ignotum conos ſecari poſſe planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, ſatis comprobat contra* Eutocium, *& alios,* Guido Ubaldus *initio Commentarii in ſecundum* ἰσοῤῥοπικῶν Archimedis. *Quæ cùm conſidero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortaſſe rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque eſt, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Aſcalonita Pag. 434.

initio Commentarii ſui in Conica Apollonii. *Atque,* Ariſtæi *judicio,* Pappi *eadem mens fuit.*

Quatuor priores libros primus tranſtulit Joan. Baptiſta Memmius; *ſed infeliciter, eò quòd Argumentum operis non intelligeret: unde, non vidit ſat manifeſtas Græci codicis mendas, ac ſæpe pueriliter hallucinatur: ſicut monitum* Franciſco Maurolyco, *præfatione in Coſmographiam ſuam. Operæ igitur fecit* Federicus Commandinus; *qui denuo Latinè vertit, Bononiæque edidit anno* 1566. *Nec tamen omnia in eo vertendo potuit* Commandinus. *Uſque adeo corruptus erat Græcus codex, quare in Latinis vitioſum ſequi codicem eſt coactus; ut ipſe agnoſcit.*

Alia quoque Apollonii *hujus citant* Proclus *in* Euclidem, *ubi laudatur* Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ. *Fortaſſe reſcribendum* τῇ Ὠκυβόῃ. *Quæ vox fuerat à* βοὴ *ſignificante pugnam: ut ſæpe apud* Homerum: Ὠκυβόαι, ταχυμάχαι. *Et quædam recenſet* Eutocius Aſcalonita *libro de dimenſione Circuli,* Eutocius *his etiam in* Conica Apollonii *commentatus fuit. Eum quoque commentarium Latinè vertit* Commandinus. *Utcunque verò nunc* quatuor duntaxat Conicorum libros habeamus, Arabicè tamen tres præterea ex Oriente eſt nactus Clariſſimus* Jacobus Golius, *antehac, in Academia Leidenſi, collega conjunctiſſimus. Cui multum Arabicæ debent literæ ac Matheſis univerſa: plura verò propediem debebunt; præſertim ubi tres illi Conicorum libri viderint lucem. Quærat aliquis quid factum ſit de libro octavo, Cognoſcimus de hoc ex Codice Goliano: ubi ad Calcem erat adſcriptum eò non fuiſſe Arabicè tranſlatum; quia etiam liber ille deſideraretur in Codicibus Græcis, unde Arabes cætera tranſtuliſſent. Sed doctiſſimus* Merſennius, *præfatione in* Apollonii *Conica; quæ ſunt in ejus* Συνόψει *Mathematica; Arabicè illum extare ait: imò omnes* Apollonii *libros eâ linguâ legi; ſane plures etiam, quam enumerarit* Pappus. *Atque horum teſtem citat* Aben Nedin; *qui librum contexuit de Philoſophis Arabibus, omniumque eorum ſcripta memoravit, qui fuere à quadringenteſimo poſt* Muhammedem *anno. Interim (ut idem* Merſennius *addit)* Claudii Mydorgii, *patricii Pariſini, ea eſt ſuſpicio tres illos Conicorum libros, qui ab Arabibus* Apollonii *creduntur non eſſe genuinos, verùm ab aliquo ſuppoſitos, qui ſub* Apollonii *nomine facere voluerit fucum. Atque hoc inde colligit; quod libro quinto prima Propoſit in vj.* Apollonii *non tantummodo in Cono recto, ſed in Scaleno etiam quolibet, & portionibus quibusvis, demonſtret poſſibilia quæque. Meminit auctoris quoque* Vitruvius, *lib.* 1. *cap.* 1. Cardanus *in* 16 *de Subtilitate ei ſeptimum inter ſubtilia orbis ingenia tribuit locum.*

*Anno 1650. antequuam tres poſteriores à Borellio ederentur.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; ſuperficiem (D A E F G) à recta linea deſcriptam, conſtantémq; ex duabus ſuperficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter ſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam deſcribit in infinitum aucta, voco *Conicam ſuperficiem.* Fig. 1.

II.

Verticem ipſius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ ſuperficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

Digitized by Google

V & VII.

Baſim, circulum ipſum (B H G).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano exiſtentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipſa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidiſtantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (~~A~~ B,) qui eſt in ipſa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidiſtantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano exiſtentium, *diametrum* quidem *tranſverſam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipſarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidiſtantes bifariam dividit (in ~~X,~~ H, G)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui ſunt in ipſis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F*)* poſita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidiſtantes, & inter ipſas interjectas, biſariam ſecat (in ~~Z vel Y~~ X.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter eſt, & rectas lineas (C D, C E) biſariam dividit. Fig. 4.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri conjugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

Nihilo differunt axes à diametris, niſi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm ſecent.

Apollonius Eudemo.

S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tuì ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. * Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

* ἀσυμπτώτους.

Theoremata , quæ utilia erunt & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes ; quorum complura & pulcherrima, & nova ſunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non poſitam eſſe ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipſius tantummodo particulam quandam, atque hanc non ſatis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compoſitio rectè perficeretur abſque iis, quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt ; coni ſectio , & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem ſcientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & ſimilibus Coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

RECtæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) ſuperficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur, in ipſa ſuperficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G ſint in ſuperficie conica, (*a*) recta ipſam deſcribens per puncta A, G tranſibit. Itaque liquet tunc rectam A G in ſuperficie conica exiſtere.

a *1. def. 1. hujus.*

Coroll. 1. Hinc conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum quæ ſunt intra ſuperficiem, recta linea ducatur, intra, & ſi ad aliquod eorum quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.

Cor.

Digitized by Google

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in ſuperficie, ductæ, baſis circumferentiæ occurrent, ſi opus eſt, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6. Si in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, ſumantur duo puncta (D,E); & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non pertineat, intra ſuperficiem cadit, quæ verò eſt in directam (E F) cadet extrà.

Conjungantur rectæ A D, A E[a] occurrentes baſis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc[b] intra circulum cadet, ac proinde intra ſuperficiem conicam; ergo[c] planum trianguli A B G eſt intra ſuperficiem conicam; ergo recta D E in ipſo ſita[c] eſt intra eandem. Porro recta A F[d] cadit in B G protractam extra circulum; &[e] proinde extra ſuperficiem conicam; ergo punctum F eſt etiam extra ipſam.

[a] 2 *Cor.* 1. 2 *hujus.*
[b] 2. 3.
[c] 2. 11.
[d] 10. 3.
[e] 1. *Cor.* 1 *hujus.*

Prop. III.

Fig. 7. Si conus (A B C) plano per verticem (A) ſecetur, ſectio (A B C) triangulum erit.

Nam A B & A C[a] rectæ ſunt: item B C[b] eſt recta. [c] ergo ABC eſt triangulum.

[a] 1. *hujus.*
[b] 3. 11.
[c] 20. *def.* 1.

Prop. IV.

Fig. 8. Si alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, ſecetur plano (D H E) æquidiſtante circulo (B K C), per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, planum (D H E) quod ſuperficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter ſecans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

Planum per axem A F faciat[a] trigonum A B C; communiſque ſectio ejus cum plano D H E[b] ſit recta D F. In ſectione D H E ſumatur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K[c] circumferentiæ baſis occurrens in K, & connectantur G H, F K. Atq; ob D E, B C, ac G H, F K[d] parallelas, erit F B. G D[e] :: (A F. A G[e] ::) F K. G H. unde cùm F B F K[f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales. idémque de reliquis à G ad ſectionem ductis rectis oſtendi poterit, Unde

[a] 3. *hujus.*
[b] 3. 11.
[c] 2. *Cor.* 1. *hujus.*
[d] *hyp* & 16. 11.
[e] 4. 6.
[f] *hyp* & 15. *def.* 2.
[g] 14. 5.

de ſectiò D H E[h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura h *15. def. 1.*
A D E conus. k *4 def. bujus.*

Coroll. 1. Recta D E eſt diameter circuli D H E. l

2. Conus A D E [m]ſimilis eſt cono A B C (ob A G. G D : : A F. F B.) m *24 def. 11.*

Prop. V.

Si conus Scalenus ſecetur plano (A B C) per axem ad rectos angulos ipſi baſi (B C), ſecetúrque altero plano (G H K) ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis (A) abſcindat triangulum (A G K) ſimile (ei A B C) quod per axem, * ſubcontrariè vero poſitam; ſectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio ſubcontraria. Fig. 9.

In ſectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] duca- a 11. 11.
tur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem b 38. 11.
[c]perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; c 3. *def.* 11.
eſtque planum per D E, H F [d]parallelum baſi B C; [e]efficitque ſecti- d 15. 11.
onem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia verò ang. e 4. *hujus.*
A D E [g]= (ang. A B C [h]=) ang. A K G, & ang. K F E [k]= G F D; f 35. 3.
æquiangula erunt trigona K F E, D F G. unde E F. F K [l] : : G F. F D. g 29. 1.
ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare ſectio G H K h *hyp.*
eſt circulus. Q.E.D. k 15. 1.
l 4. 6.
m 16. 6.
n *prius.* o *conv.* 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſumatur autem aliquod punctum (D) in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem; & ab ipſo ducatur recta linea (D E) æquidiſtans cuidam rectæ (M N), quæ perpendicularis eſt à circumferentia circuli (BMC) ad trianguli baſin (B C); trianguli per axem occurret, & ulteriùs producta uſque ad alteram ſuperficiei partem, biſariam ab ipſo triangulo ſecabitur. Fig. 10.

Recta A D protracta circumferentiæ baſis occurrat puncto K; per
quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo a 30. 1. b
D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad
ſuperficiem G.

Liquet rectam A L, (cùm ſit in plano A D E, vel A K L, & in ſuperficie coni) ipſi D F occurrere in G. & fore K H. D F : : (A H. A F : :) H L. F G. unde quum ſit K H = H L, erit D F = F G. *Q. E. D.*

Prop.

Digitized by Google

Propoſ. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano (D F E) ſecanti planum baſis coni, ſecundùm rectam lineam (D E) quæ ſit perpendicularis, vel ad (B C) baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: lineæ (H K) quæ à ſectione (D F E), in ſuperficie coni à plano facta, ducuntur æquidiſtantes ei (D E), quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim (B C), in communem ſectionem (F G) plani ſecantis, & trianguli per axem, cadent. Et ſiquidem conus ſit rectus linea (D E), quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad (F G) communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, ſi verò Scalenus, non ſemper, niſi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad baſim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi ſectioni F G occurrat, inque ipſo occurſu biſecetur, liquet ex præcedenti. Porro, ſi conus rectus ſit, erit circulus B C plano A B C rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G perpendicularis. Idem diſcurſus valet, ſi trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; ſin hoc non fuerit, non erit D E ad F G perpendicularis: Nam ſi D E utrique B C, F G perpendicularis ſit, [b] erit eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C rectus erit, contra Hypoth.

a 4. *def.* 11.
b 4. 11.
d 18. 11.

Coroll. Hinc F G diameter eſt ſectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas biſecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus ſecetur plano (A B C) per axem, & ſecetur altero plano (D F E) ſecanti baſim coni (B D C) ſecundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; diameter autem (F G) ſectionis factæ in ſuperficie, vel æquidiſtet uni (A C) laterum trianguli, vel cum ipſo extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum ſuperficies coni (A B C) tum planum ſecans (D F E); ſectio quoque ipſa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) ſectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem FGM (~~GFH~~) abſcindet linea (M N H), quæ quidem à coni ſectione (M F N) ei (D E) quæ eſt in baſi, æquidiſtans ducta fuerit.

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam a *Hypoth.*
conveniet, ſi ipſa ad [b] libitum producatur, puta ad H,& per H ducantur b 3. 1.
K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano c 15. 11.
B D C E parallelum erit, ínque ſuperficie coni producta [d] circulum d 4. *hujus.*
efficiet, ad quem ſi protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum,
& ſectionem D F E &c.

Prop. IX.

Si conus (A B C) ſecetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque baſi (B C) æquidiſtet, nec ſubcontrariè ponatur, ſectio (D K E) circulus non erit. Fig. 13.14.

Si fieri poteſt, ſit D K E circulus; & ab H baſis centro ad F G (communem ſectionem baſis cum plano ſecanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem tranſeat trigonum A B C. Dein ſumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi ſectioni plani ſecantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde $KM = ML$. a 6. *hujus.*

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per
N X, K L, [b] plano B C parallelum eſt, * ideóque circulum efficit. In b 15. 11.
quo K L [b] diametro N X [c] eſt perpendicularis, erit $NM \times MX \overset{d}{=}$ * 14. *hujus.*
$(KMq\,(\overset{d}{=})\; DM \times ME$. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. ~~K~~ M c 10. 11. (6.
:: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X ſimilia ſunt: & ang. d *cor.* 13. & 16. ∧D
$MEX = ($ang. D N M [h] $=)$ ang. A B C. Itaque ſectio eſt [k] ſub- e *hyp.*
contraria; contra Hyp. ergo ſectio D K E non eſt circulus. *Q. E. D.* f 16.6. g 6.6.
h 29. 1.
k 5. *hujus.*

Prop. X.

Si in coni ſectione (F E D) ſumantur duo puncta (G,H); recta linea (G H), quæ ejuſmodi puncta conjungit, intra ſectionem cadet,& quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra. Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] ſunt extra latus trigoni (A B C) per axem a *hyp.*
ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra co- b 2. *hujus.*
num cadet, ac proinde intra ſectionem; ſin producatur extra conum
cadet, ac proinde extra ſectionem.

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero Fig. 16.

plano (D F E), ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam (D E), quæ ad baſim (B C) trianguli per axem ſit perpendicularis, & ſit ſectionis diameter (F G) uni (A C) laterum trianguli per axem æquidiſtans; recta linea (K L) quæ à ſectione ducitur æquidiſtans ſectioni (D E) plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum (F G), poterit ſpatium æquale contento, lineâ (F L), quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam (K L) & ſectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (F H) quæ ad lineam (A F) inter coni angulum (A) & ſectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum baſis (B C) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (A B, A C) continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio PARABOLE.

a 15. 11. Per L ducatur M N ad B C parallela; éſtque ſectio plani per M N,
b 4. *hujus.* K L ducti (ad B D C E [a] paralleli) [b] circulus; [c] & K L ad M N per-
c 10. 11. pendicularis; [d] unde K Lq = M L × L N. Porro F L × H F. F L ×
d *cor.* 13. & 16. 6. e 1. 6. F A [e] :: (H F. F A [f] :: B Cq. A C × A B [g] = B C. A C. [h] (M L.
f *hypoth.* F L) + B C. A B [h] (M L. F M, [k] vel L N. F A) = M L. F L +
g 23. 6. L N. F A [g] =) M L × L N. F L × F A. [l] ergo M L × L N ([d] K Lq)
h 4. 6.
k 2. 6. 19. 5. = F L × H F. *Q. E. D.*

Propoſ. XII.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano (D F E) ſecanti baſim coni ſecundùm rectam lineam (D E) quæ ad baſim (B C) trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter (F G) producta, cum uno latere (A C) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (M N), quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni (D E) plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium (F N X P) adjacens lineæ (F L), ad quam ea (F H), quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditúrque angulo (F A H) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (A K) quæ diametro (F G) æquidiſtans, ab vertice (A) ſectionis uſque ad trianguli baſim (B C) ducitur, ad rectangulum baſis partibus (B K, K C), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (F N), quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam (M N), & ſectionis verticem (F) interjectam, excedénſque figurâ (~~F N~~ O L) ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ continetur lineâ (H F) extra angulum ſubtenſâ, & ea (F L), juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum (F G) applicantur. Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Hyperbole*.

Fig. 17.

PX

Per N ducatur R S ad B C parallela. Eſtque F N * H N. F N * N X[a] :: (H N. N X)[b] :: H F. F L[c] :: A Kq. B K * K C[d] = A K. B K ([b]F G. G B, [b] vel F N. N R) + A K. K C. ([b]A G. G C. [b] vel H N. N S.) = F N. N R + H N. N S[d] =) F N * H N. N R * N S. ergo F N * N X[e] = (N R * N S[f] =) N Mq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.H
e 9. 5.
f 4. *hujus*, & *cor.* 13, *ac* 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 18.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, & ſecetur altero plano (E L D) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, nec ſubcontrariè ponatur; planum autem, in quo eſt coni baſis (B C), & ſecans planum conveniant ſecundùm rectam lineam (F G) quæ ſit perpendicularis vel ad baſim (B C) trianguli per axem, vel ad eam (B C K), quæ in directum ipſi conſtituitur; recta linea (L M) quæ à coni ſectione ducitur, æquidiſtans planorum communi ſectioni (F G) uſque ad ſectionis diametrum (E D) poterit ſpatium (E O X M) adjacens lineæ (E H), ad quam ſectionis diameter (E D) eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ (A K) diametro (E D) æquidiſtantis à coni vertice (A) uſque ad trianguli baſin (B C) ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus (B K, C K), quæ inter ipſam (A K) & rectas trianguli lineas (A B, A C) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (E M), quæ ex diametro (E D) ab ipſa abſcinditur ad ſectionis verticem (E): deficienſque figurâ (O H N X) * ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ diametro (E D) & lineâ (E H) juxta quam poſſunt, continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio *Ellipſis*.

Per M ducatur P M R ad B C parallela. Eſtque E M *. D M. E M. * M X[a] :: (D M. M X[b] :: D E. E H[c] :: A Kq. B K * K C[d] = A K. B K ([b]E G. G B. vel [b] E M. M P) + A K. K C. ([b]D G. G C. [b] vel D M. M R) = E M. M P + D M. M R[d] =) E M * D M. M P * M R. ergo E M * M X[e] = (M P * M R[f] =) M Lq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus.* & *cor.* 13. & 16. 6.

Prop. XIV.

Fig. 19.

Si ſuperficies (B C A X O), quæ ſunt ad verticem (A), plano non per verticem ſecentur, erit in utraque ſuperficierum ſectio (D E F, & G H K) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum ſectionum eadem erit diameter (M E, H N), lineæ verò (E P, H R), juxta quas poſſunt ordinatæ ad diametrum, æquidiſtantes ei, quæ eſt in baſi coni, inter ſe æquales erunt. Et figuræ tranſverſum latus (E H) utrique commune; quæ ſcilicet inter ſectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujuſmodi ſectiones *Oppoſitæ*.

Quòd utraque ſectio D E F, G H K, ſit Hyperbole, liquet ex $12^{mâ}$ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, eſt A S. B S [a] :: A T. T O. & A S. S C [b] :: A T. T X. Unde A Sq. B S. × S C ([b] hoc eſt H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b] hoc eſt E H. H R). [c] quare E P = H R.

a 4. 6.
b *hyp.*
c 9. 5.

Prop. XV.

Fig. 20.
Fig. 21.

Si in Ellipſi à puncto (C) quod diametrum (A B) biſariam dividit, ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad ſectionem producatur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à ſectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidiſtans, poterit ſpatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipſam & ſectionem interjicitur, deficienſque figurâ (M K) ſimili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam poſſunt. Quòd ſi ulterius producatur (G H) ad alteram ſectionis partem (V), biſariam ſecabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam poſſunt applicatæ ad A B: junctâque B N, per G ducatur G X ad D E parallela, pérque C & X ipſæ X O, C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipſi A B parallelæ N R, O S, P T. Liquet igitur eſſe D Cq [a] = rectang. A P. & G Xq [a] = rectang. A O. Et ob A N C P. (A T) [b] :: (A B. C B [c] :: 2. 1.) erit T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T [d] = Y T [e] = N S (ob T O [f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) + O P [e] = (rectang N P [d] = A P [a] = C Dq [g] =) H Cq (G Xq) + H E × H D. & proinde rectang. H E × H D [h] = rectang. O P. (P S × S O). Item H E × H D. H L × H D [k] :: (H E. H L [l] :: D E. D F [m] :: D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ÷÷) [o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel P C × C B). C Bq [k] :: P C. C B [k] :: P S. S O [p] ::) P S × S O. [h] (H E × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q [r] =) H Gq. Quod erat primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter A X × X O [a] = (G Xq [r] = V Qq [a] =) A Q × Q Z [s], erit A Q. A X [s] :: (X O. Q Z [t] ::) X B. Q B. ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B. quare

a 13. *hujus.*
b 4. 6.
c *hyp.*
d 1. 6.
e 2. *ax.* 1.
f 43. 1.
g 5. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 1. 6.
l 4. 6.
m *cor.* 20. 6.
n *hyp.*
o 15. 5.
p 23. 6.
q 9. 5.
r 34. 1.
s 14. 6.

quare X A = Q B. item C A [v] = C B. [x] ergo C X = C Q; [t] hoc eſt H G = H V. Quod erat ſecundum. t 9. 5: v hyp. x 3. ax. 1.

Coroll. Itaque D E eſt diameter altera priori A B conjugata.

Schol.

Brevius ita Calculum inſtituemus.

Sint { B C, vel C A $= d$.
A N $= r$.
C X, vel H G $= a$. } Fig. 22.

Eſt igitur { B X $= d + a$.
A X $= d - a$. }

Eſt autem $2d. r :: d + a. \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ quare $d - a$ (A X) $\ast : \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ hoc eſt $\frac{dr}{2} - \frac{raa}{2d} =$ G Xq vel H Cq. Item quia $2d. r$ (B A. AN) :: d, (B C). $\frac{r}{2}$. erit d (B C) $\ast \frac{r}{2}$, h. e. $\frac{dr}{2} =$ DCq. Ergo DCq — HCq (h. e. H E $\ast$ H D) $= \frac{raa}{2d}$. Porrò quia D Cq. B Cq (hoc eſt $\frac{dr}{2}. dd$) :: D Eq. A Bq :: D E. D F (ob D E, A B, DF $\div\!\div$) :: H E. H L :: H E $\ast$ H D. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. H L $\ast$ H D :: $\frac{dr}{2}. dd :: \frac{r}{2}. d :: \frac{raa}{2d}. aa$. Erit H L $\ast$ H D $= aa =$ H Gq.

Simili diſcurſu erit H L $\ast$ H D = H Vq. unde H G = H V.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod tranſverſum latus (AB) oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, recta quædam linea (C D) ordinatim applicetur, ipſarum diameter erit, priori diametro (A B) conjugatæ. Fig. 23.

Recta quæpiam G H ad A B parallela ſectionibus occurrat punctis
G, H, à quibus ordinatim applicentur G K, H L; ſintque A E. B F a 13. hujus.
recta ſectionum latera; & junctæ A F, B E producantur; ducan- b 34. 1.
túrque K M, L N ad A E, B F parallelæ. Eſtque A K $\ast$ K M [a] = c 1. 6.
(G Kq [b] = H Lq [a] =) B L $\ast$ L N. Item A K $\ast$ K M. A K $\ast$ K B [c] :: d 4. 6. (5.
(K M. K B [d] :: A E. A B [e] :: B F. B A [d] :: L N. L A [c] ::) B L $\ast$ e 14. hujus. et 7
L N. B L $\ast$ L A. ergo (ob A K $\ast$ K M [f] = B L $\ast$ L N) [g] erit A K $\ast$ f priùs.
K B = B L $\ast$ L A. [h] quare K B. B L :: L A. A K, & componendo g 14. 5.
K L. h 14. 6.

k 9. 5. $KL . BL :: LK . AK$. [k] ergo $BL = AK$. & [l] proinde $CL = CK$;
l *hyp.* & *3. ax.* [m] hoc eſt $XH = XG$. [n] ergo CD eſt diameter, quippe quæ ipſam
m 34. 1. GH, & ſimiliter omnes ad AB parallelas biſecat.
n 12. *def. hujus.*

Coroll. 1. Si $GK = HL$, erit $AK = BL$; & $BK = AL$. ac inde $BK \times AK = AL \times BL$.

2. Viciſſim, ſi $AK = BL$, vel $BK = AL$. erit $GK = HL$. & $BK \times AK = AL \times BL$.

DEFINITIONES SFCVNDÆ.

Fig. 24. 25. 1. Punctum (C), quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum (A B) biſariam dividit, Centrum ſectionis dicatur.

2. Et quæ à centro (C) ad ſectionem perducitur (C B) vocetur ex centro ſectionis.

3. Similiter & punctum (C) quod tranſverſum latus (A B) oppoſitarum ſectionum biſariam dividit, Centrum vocetur.

4. Quæ autem (D E) à centro ducitur æquidiſtans ei (G K), quæ ordinatim applicata eſt, mediámque proportionem habet inter latera figuræ (A B, B F) & biſariam ſecatur à centro (C), ſecunda diameter appellatur.

Brevitatis causâ, Tranſverſum latus, Rectum latus, & ſecundam diametrum elementis T, R, M deſignabimus: unde

* Cor. 20 6. *Coroll.* * $Tq . Mq :: T . R$. (ob $T, M, R \div\div$.)

$$\& \; CDq = \tfrac{1}{4} DEq \doteq \frac{Mq}{4} = \tfrac{1}{4} T . R.$$

Viam jam munit ad ſingularum ſectionum proprietates primas, & præcipuas eliciendas.

Prop. XVII.

Fig. 26. Si in coni ſectione (C A D), ab ipſius vertice (A) ducatur recta linea (A C) æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, extra ſectionem cadet.

a 7. *hujus.* Nam ſi dicatur intra cadere, [a] ergo biſecabitur à diametro; quod
b 10. *hujus.* fieri nequit, [b] cùm producta extra ſectionem cadat.

Digitized by Google

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) ſectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra ſectionem cadat; ſumatur autem aliquod punctum (C) intra ſectionem, & per ipſam ei (A B), quæ ſectioni occurrit, ducatur æquidiſtans (C D); ducta linea (C D), & producta, ex utraque parte ſectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in ſectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipſi C D occurret; & ſiquidem inter puncta E F, manifeſtum eſt ipſam ſectioni occurrere; ſin extra, tum priùs cum ſectione conveniet. Simili diſcurſu ad partes A F ſectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni ſectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in ſectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & ſiquidem inter puncta A D, tum B C ^{a} protracta ſectioni occurret, ſin extra, priùs. [a] 10. *hujus.*

Prop. XX.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à ſectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter ſe, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipſis ex diametro ad verticem abſcinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq^{a} = A E × A G. ^{a} & D Fq = A F × A G. ergo C Eq. D Fq^{b} : : (A E × A G. A F × A G^{c} : :) A E. A F. *Q. E. D* [a] 11. *hujus.* [b] 7. 5. [c] 1. 6.

Converſim. Si ſit C Eq. D Fq : : A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. D F $\sqsubset$ C E.

Hæc prima & præcipua eſt parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipſi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad ſpatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipſas, & vertices (A, B) tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad tranſverſum (A B); inter ſe verò ut ſpatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes productæ B C in H, & K. Eſtque C A. A B [a] : : (H E. E B [b] : :) H E × E A([c] hoc eſt D Eq). E B × E A. Simili diſcurſu C A A B : : F Gq. G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A [d] : : F Gq. G B × G A. & viciſſim D Eq. F Gq. : : E B × E A. G B × G A.

a 4. 6.
b 1. 6.
c 12. *hujus.*
d 11. 5.

GF *Coroll.* In hyperb. ~~F E~~ $\sqsubset$ D E. (in ellipſi uſque ad conjugatam ipſi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decreſcere) *Sch.*

Converſim; ſi fuerit D Eq. E B × E A : : R T. vel D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum ſectionum.

Hæc prima eſt & præcipua harum ſectionum proprietas, ex ipſarum definitione reſultans.

Coroll. D Eq. E B × B A : : ~~Rq~~. Mq. Tq.

Viam jam ſternit ad ſectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Fig. 31. 32. Si Parabolen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis (C, D) ſecet, non conveniens cum ſectionis diametro (A B) intra ſectionem, producta cum eâdem diametro extra ſectionem conveniet.

a *cor.* 20. & b *cor.* 21. *hujus.* Ordinatim applicentur C E, D B: ſunt hæ inæquales, & [a] minor D B, [b] ergo juncta C D producta cum E A conveniet extra ſectionem ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

* *id eſt*, conjugatas. Si ellipſin ſecet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra ſectionem.

Fig. 33. Ordinatim applicentur E G, F H. atque ob E Gq. F Hq [a] : : B G × G A. B H × H A, [b] & B G × G A $\sqsubset$ B H × H A (eſt enim punctum G propiùs centro M, quàm punctum H); [c] erit E Gq $\sqsubset$ F Hq. & E G $\sqsubset$ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad partes

a 21. *hujus.*
b 5. 2.
c 14. 5.

partes A. Simili diſcurſu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G $\sqsubset$ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra ſectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in ſectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decuſſat ipſa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A ſcilicet & ſectionem.

[a] 22. *hujus.*

Prop. XXV.

Si ellipſi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra ſectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K; hæc diametro A B eſt parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili diſcurſu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) ſectionis diametro (A B) æquidiſtans, in uno tantùm puncto (E) cum ſectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cum ſectione, patet, (quoniam diſtantia parallelarum C D, A B eſt finita, ſectio autem in infinitum poteſt augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad ſectionem, excedet iſtam diſtantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores ſint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nuſquam convenire cum ſectione, præterquam in E.

[a] *cor.* 20. & *cor.* 21. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) ſecet recta linea (C D), producta in utramque partem cum ſectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; ſi C D huic parallela ſit,

a 19. *hujus.*
b 17. *hujus.*
c 11. 6.
d 19. 5.
e 4. & 22. 6.
f 22. 6.
g *conſt.* & *cor.* 20. 6.
h *conv.* 20. *hujus.*

[a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere ; ſin minùs, producta conveniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G ; ordinatim igitur applicetur G F ; [c] fiátque A F. A D :: AD. AB. [d] unde F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit, F Dq. D Bq. ([e] hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] : : A F. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſectione : quare C D utrinque ſectioni ocurrit.

Prop. XXVIII.

Fig. 38.

Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

a 4. 6.
b *conſtr.*
c 14. 5.
d *conſtr.* & *Sch.* 48. 1.
e 7. 5.
f 21. *hujus.*

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G. Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela, ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque G M = H L ; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumento ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.*
b *conſtr* & *ſch.* 48. 1.
c 14. 5.
d *conſtr.*
e 29. 1.
f 4. 1.
g *Sch.* 15. 1.

Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = A F ; & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. éſtque B F × A F. D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G × B G. [c] erit D Fq = G Eq. & D F = G E. [d] Item C F = C G. & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E : [g] quare linea D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.

Coroll. 1. D F = E G.

2. C D = C E ; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop. XXX.

Si in ellipſi vel oppoſitis ſectionibus ducatur recta linea D E, ad utraſque partes centri (C) ſectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam ſecabit. Fig. 40.

In oppoſitis ſectionibus patet * ex præcedenti. In ellipſi verò ad diametrum A B ordinatim applicentur D F, E G. Et quoniam B F × F A. A G × G B ^{a} :: (D Fq. G Eq ^{b} ::) F Cq. G Cq. & permutando B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. (B F ^{c} × F A + C Fq). F Cq :: B Cq. ^{c} (A G × G B + G Cq) G Cq. ſitque A C ^{d} = B C. ^{e} erit F C = G C; & propterea C D ^{f} = C E.

Coroll. C G = C F, & G E ^{f} = D F; & G B ^{g} = F A. & B F ^{g} = A G. & B F × F A ^{h} = A G × G B.

* *cor.* 2. *præc.*
a 21. *hujus.*
b 4. 6. & 22. 6.
c 5. 2.
d *conſtr* & 10. *def. hujus.*
e 14. 5.
f 4. 6.
g 3. *ax.* 1.
h *Sch.* 48. 1.

Prop. XXXI.

Si in transverſo figuræ latere (A B) hyperbolæ, ſumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abſcindens ad verticem ſectionis, quàm ſit dimidia tranſverſi lateris (A B) figuræ, & ab ipſo (C) recta linea (C D) ſectioni occurrat, ſi producatur, intra ſectionem ad ſequentes ipſius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, * F E G. Et quia C Gq. C Bq ^{a} $\sqsubset$ C Hq. C Bq. erit per converſam rationem CGq. C Gq — C Bq $\sqsupset$ C Hq. C Hq — C Bq. & inversè C Gq — C Bq. C Gq $\sqsubset$ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq — C Bq. ^{b} (A G × G B.) C Hq — C Bq ^{b} (A H × H B) $\sqsubset$ (C Gq. C Hq ^{c} ::) GEq. H Dq). ergo cum A G × G B. A H × H B ^{d} :: G Fq. H Dq. erit G Fq. H Dq ^{e} $\sqsubset$ G Eq. H Dq. ^{f} ergo G F $\sqsubset$ G E. ergo C D E intra ſectionem cadit.

* utcunque hæc ad partes E.
a 8. 5.
b 6. 2.
c 4. & 22. 6.
d 21 *hujus.*
e 13. 5.
f 10. 5.

Quòd ſi ab aliquo puncto in A C (poſito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipſam C D decuſſabit in D, adeóque magis intra ſectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum ſecat inter verticem, & centrum ſectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis ſecat (vel quæ tangenti parallela eſſe poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni ſectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidiſtans, ſectionem continget, & in locum (CAG), qui inter coni ſectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. Si fieri poteſt, cadat A D, & à puncto D (utcunque ſumpto in A D)
44. ordinatim applicetur D G E. Sintque A F, B A latera figurarum. Jam
in parabola fiat A F. A H :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D
a 11. *hujus.* parallela, ſectioni occurrens in L. Eſtque A F × A H [a] (L Hq). AHq
b 1. 6. [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH.
c *conſtr.* [f] *Q. E. A.*
d 4. & 22. 6.
e 9. 5.
f 9. *ax.* 1.

In reliquis ſectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; &
per E ducatur E M N ad A F parallela, fiatque A E × E N = D Eq;
& juncta A N ſecet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad A C
g 12. *hujus.* parallelæ. Eſtque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [h] :: (X H. A H [h] ::
h 4. 6. N E. E A [b] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo
L Hq [f] = K Hq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

Cor. Si duæ ſectiones ſeſe contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, ſumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (CD) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipſa ex diametro abſcinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) quod ſumptum fuerat, ſectionem continget.

a *Not. infra.* Sumpto utcunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B,
b 4. *ax.* 1. ſectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] ⊐ A Eq +
c 4. 2. E Bq; erit 4 A E × E B [b] ⊐ (A Eq + E Bq + 2 A E × EB [c] =)
d 13. 5. A Bq; [e] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq
e 1. 6. [d] ⊐ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E ×
f 20. *hujus.* E D ([e] hoc eſt, E B. E D, [f] vel G Bq. C D q) ⊐ A Bq. A Dq.
g 4. & 22. 6. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D ⊐ F B. C D. [k] quare G B.
h 22. 6. ⊐ C D. unde punctum F eſt extra ſectionem; idémque de reliquis
k 10. 5. FB

rectæ A C punctis ſimili diſcurſu oſtendetur. ergo recta A C F ſectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B $\sqsupset$ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = ^{z} cor. 7. 2.
2 A E × E B + Quad: A E — E B (^{z} hoc eſt + A Eq + E Bq
— 2 A E × E B).

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum (C), ab eóque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos tranſverſi lateris (A B) figuræ; eandem habeant inter ſe (B E, E A) partes lateris tranſverſi, ita ut quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant (B D. D A : : B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in tranſverſo latere ſumitur, & punctum (C) quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, ſectioni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F parallelæ, & protrahantur D C K, B C X, G C M. Eſtque B K. A N ^{a} :: (B D. D A ^{b} :: B E. E A ^{a} :: B C. C X ^{a} ::) B K. N X. ^{c} ergo N X = A N. quare N X × A N ^{d} $\sqsubset$ A O × O X. ^{e} ideóque N X. O X ^{f} (hoc eſt K B. M B) ^{e} $\sqsubset$ A O. A N unde K B × A N $\sqsubset$ M B × A O. ^{g} ergo K B × A N. C Eq (^{h} hoc eſt B D × D A. D Eq.) $\sqsubset$ B M × A O. C Eq ^{h} (hoc eſt B G × G A. G E q) & permutando B D × D A. B G × G A ^{k} (hoc eſt C Dq. H Gq) $\sqsubset$ D Eq. G Eq. ^{l} (C Dq. F Gq) ^{m} ergo C D. H G $\sqsubset$ C D. F G. ^{n} ergo H G $\sqsupset$ F G. quare punctum F extra ſectionem exiſtit. Quare E F ſectionem contingit.

a 4. 6.
b hyp.
c 9. 5.
d 5. 2.
e Not. 2. infra.
f Not. 1.
g 8. 5.
h 3. Not.
k 21. hujus.
l 4, & 22. 6.
m 22. 6.
n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd ſit N X. O X :: K B. M B; ſic patet: quoniam N O. K M ^{o} :: (O C. C M ^{o} ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: K M. M B. erit componendo N X. O X :: K B. M B. ^{o} 4. 6.

2. Quòd ſit N X. O X $\sqsubset$ A O. A N, ſic oſtenditur. Sit R × S $\sqsubset$ X × Y. Dico R. X $\sqsubset$ Y. S. Sit enim R S = X Z. ^{p} ergo Z $\sqsubset$ Y. ^{q} ergo Z. S ^{r} (hoc eſt R. X) $\sqsubset$ Y. S.

p ſch. 48. 1.
q 8. 5.
r 17. 6.

3. Quòd ſit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita conſtabit: quoniam A N. C E ^{s} :: A D. D E. & C E. K B ^{s} :: D E. D B erit ex ^{s} 4. 6.

t. 1. 6. æquo A N. K B [t] (A Nq. A N × K B) :: A D. D B [t] (A Dq. A D ×
u 4. & 22. 6. D B). [u] Item C Eq. A Nq :: D Eq. A Dq. ergo rurſus ex æquo C Eq. A N × K B :: D Eq. A D × D B, ac inverſè.

Coroll.

Hinc ſi $\frac{T \times AD}{T + 2AD} = AE$ in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipſe, erit E C tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (A C) contingat, conveniens cum diametro (A B) extra ſectionem (in A), quæ (C B) à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam (B G) æqualem ei (G A), quæ inter ipſam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui eſt inter contingentem, & ſectionem, alia recta linea non cadet.

Si fieri poteſt, ſint A G, G B inæquales; ipſique A G æqualis ponatur G E; & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta A F ſectionem
a 33. *hujus.*
b 14. *ax.* 1.
continget, & rurſus occurret ipſi A C. [b] *Q. E. A.*

Porro dic aliquam D C ſectionem inter & A C cadere; fiátque G E = G D. & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta D F tanget ſectionem, ipſámque D C iterum decuſſabit. [b] *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. 50. Si hyperbolen vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (C D) conveniens cum tranſverſo figuræ latere (B A), & à tactu recta linea (C E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; erit ut linea (B D) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) tranſverſi lateris ad (D A) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (B E), quæ eſt inter ordinatim applicatam (C E) & lateris terminum (B) ad eam (E A), quæ eſt inter eandem (C E) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent (B D. D A :: B E. E A). Et in locum, qui inter contingentem, & ſectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. *hujus.* Si enim non ſit B D. D A :: B E. E A; ſit B D. D A :: D G. G A.
b 14. *ax.* 1. & ordinatim applicetur G F; [a] ergo ducta D F ſectionem continget, iterúmque conveniet cum recta [b] D C. *Q. E. A.*

Quinetiam ſi aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim: [a] itaque juncta H F ſectionem continget, [b] ipſamq; D G bis decuſſabit. *Q. E. A.*

Cor. Hinc ſi C D tangat, erit in hyperbola $A\underset{E}{G} = \frac{T \times AD}{T - 2AD}$;

in ellipſe $A\underset{E}{G} = \frac{T \times AD}{T + 2AD}$.

Not. In hyperbola $A\overset{E}{G} \sqsubset AD$: quia $T - 2AD \sqsupset T$.
In ellipſe $A\underset{E}{G} \sqsupset AD$, qùia $T + 2AD \sqsubset T$.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & à tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & ſectionis centrum (F), unà cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & ſectionis centrum (F); continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ eſt ex centro ſectionis; ſed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ (CE), eandem proportionem habet, quam tranſverſum figuræ latus ad rectum. Fig. 51. 52.

Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B :: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per converſam rationem, F E. F B :: F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.*

Item, inverſè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B — F D). E B (F E — F B). ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. C Eq [g] ::) T R. *Q. E. D.*

In Ellipſi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. D B. erit quoque (bipartiendo antecedentes,) F B. E B :: F D. D B. & per converſam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = F Bq. hoc eſt D E × F E + F Eq [k] = (F Bq =) A E × E B + F Eq [m] ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. C Eq [o] ::) T.R.

a 36. *hujus.*
b 17. 6.
c *hyp.*
d 19. 5.
e 16. 6.
f 7. 5.
g 21. *hujus.*
h 17. 6.
k 3. 2.
l 5. 2.
m 3. *ax.* 1.
n 7. 5.
o 21. *hujus.*

Coroll. F E, F B, F D ſunt $\div\div$.

F E. E B :: F B. D B.
F B. B E :: F D. D B.
F B. F D :: B E. D B.

Hinc

ized by Google

Digitized by Google

ARCHIMEDIS EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* ſcripta, partim ab illo facta; ſed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc ſenſum narrat. Cùm *Hiero Syracuſarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; poſteaque intellexerat Artificem, Auri parte ſurreptâ, Argentum æquali pondere ſubſtituiſſe; *Archimedem* ea de re conſuluit. Ille autem Balneum ingreſſus, effluentem aquam conſpicatus, hinc anſam cepit determinandi, quantum Auri ſurreptum fuerat; ſtatimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Ἕυρηκα, Ἕυρηκα, domum ſe contulit. Nempe, cum Aurum, ejuſdem ponderis, minoris molis ſit quàm Argentum; moleſque corporis irregularis non aptiùs colligi poſſit, quàm ex Aquæ menſurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum ſpatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejuſdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum eſſe, quantum Auri & quantum Argenti miſcuerat Artifex. Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum inſtituerit, & quantâ ſubtilitate ſingulorum molem rimatus eſt, non exponit *Vitruvius*; contentus rem craſſiùs expoſuiſſe, quam ipſam (puto) executus eſt *Archimedes*. Et, ſiquid ea de re ſcripſit *Archimedes* ipſe, periit. Alii alios modos expoſuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in ſuo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptiſta Hodierna* in ſuo *Archimede Redivivo*, impreſſo *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644. Italicé.

Calculus ſic commode inſtituitur. Pondus Auri quantum eſt Coronæ, occupet ſpatium L; Pondus Argenti huic æquale, ſpatium L + M. Pondus Coronæ, ſpatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, ſic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe ſpatii incrementum M prodiret ſi totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, oſtendet quantum jam commutatum ſit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ ſtupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, ſimilibuſque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujuſmodi figuram accommodant: & ſpeciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis inſtrumentis) ſtupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujuſmodi, ex conjecturâ ſupplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribaſio*, recenſet *Archimedis* Triſpaſtum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Neſcio an 50000 legendum ſit, propter πεντεμυριομέδιμνον.) Figuraſque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Balliſtas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis inſtar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, naveſque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum eſt.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύρεια memorat, ſeu ſpecula Uſtoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu poſthumo, *Del Specchio Uſtorio*, (*Bononiæ* impreſſo in 4°, Anno 1650.) Italicè fuſius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroſcopica: nec hujuſmodi tantum Inſtrumenta conſtructa, ſed & libros ab *Archimede* conſcriptos.

8. Ex *Clandiano*, *Archimedi* Σφαιροποιΐαν memorat; ſeu machinam Cœleſtium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exſtet ab *Archimede* conſcriptum; non niſi ex dubiis conjecturis ſuppleri poſſunt.

FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA ſic corrigantur:

Pag	Lin	In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	X *pro* H & G.
3	2	Z vel Y *pro* X.
8	*pe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	F E ⊏ D E *pro* G F ⊏ D E.
16	17	DEq . EB x BA : : Tq . Mq *pro* DEq . EB x AE : : Mq . Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4,5 6,7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine,* D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.
54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
66	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33	H F x F B *pro* H F x F D.
68	34	
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	ſectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	LSH *pro* LSF, & ALN *pro* ALM.
74	22	*Deeſt* + *inter* AEq & CXxXA.
75	*pe.*	*Deeſt* + *inter* EXq & CExED.
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 22.6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
86	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur,* FN.FL::NK.KL. & (ob ſect. AMD) NK.KL :: NM . ML quar FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Libri I. *Prop.9.nota* f, *pro* 17.6 *lege* 16.6. *pr.*16.*n.*a, 13 hujus *l* 12 hujus. *pr.*20.*n.*c, 3.6 *l.*1.6. *pr.*33.*n.*c, 4. *l* 4.2. *pr.*38 *n.*c, 21 hujus *l.*37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.*37 hujus. *pr.*45.*n.*f, 7.1 *l.* 7.5. *pr.*45.*n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5.

Libri II. *Prop.* 2. *nota* g, *pro* 6.5 & 3 ax. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g, *deeſt hac citatio* (17 ax. 1.)

Libri III. *Prop.* 4. *nota* a, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.* 8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in ſingulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.*20. *n.* c, 16.3 *l.*4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.*34 *n.*e, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37. *n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.*44.*n.*b, & *pr.*45.*n.*c, *pro* 15.6 *l.*16.6. *pr.*56.*n.*p, ex 2 vel 4.8 *l.* 2 vel 4.3.

Libri IV. *Prop.*14 *nota* a, *pro* cor.14 hujus *lege* 5 hujus *pr.* 15. *n.*b, 36.1 hujus *l.*39.3 hujus. *pr.* 21. *n.*a, 6 hujus *l.* 8 hujus. *pr.* 21. *n.*b, 15 hujus *l.* 17 hujus.

In Schematis.

Fig.14. *deeſt linea* F G. fig. 30 *deeſt* D *ubi* EH *occurrit ſectioni.* fig.136. *pro* H *lege* B. fig.148 *deeſt* D *ubi lineam* AC *biſecat* KB. fig.176. *deeſt* E. fig. 194. *deeſt ubi* Y *ubi* LX *diametro occurrit.* fig.276. *deeſt* E *ubi* DK *ſectioni occurrit.*

APOLLONII CONICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott,*
in vico **Little-Britain.** 1675.

Digitized by Google

De THEODOSIO, *ex* VOSSIO *de Scientiis Mathematicis.*

In temporibus Ciceronis ac Pompeii claruit Theodoſius Tripolites qui partem Geometriæ de figura Sphærica libris tribus utiliſſimis egregiè excoluit.

Eos Græcè edidit Latinèque vertit ac Lutetiæ Wechelii *typis mandavit* Joannes Pena *Mathematicus Regius. Compluria ex eo* Ptolomæus *hauſit &* Ptolemæo *recentiores*, Pappus, Proclus, Theon, *multa item; ſed, diſſimulato* Theodoſii *nomine;* *exſcripſit* Vitellio, *ob quæ tamen maximè fuit admirationi.* Arabes *etiam in Linguam ſuam tranſtulerunt. Ex Arabico verò Latinè verſus fuit à* Platone Tiburtino, *ut auctor eſt, qui de Speculis uſtoriis ſcripſit. Eaque interpretatio* Venetiis *excuſa, ante annos jam* 155 *eo nempe à quo & Almanſoris Judicia ex Arabico Latine verſa ſunt. Sed immane quantum intereſt inter genuinum* Theodoſium *& Arabicè loquentem, uſque adeò ut ob tam multa addita alius videri poſſit, quæ res compulit* Joannem Penam *regium apud Pariſienſes Mathematicum, ut, non contentus Græcè edere, quod per ſe magnam laudem merebatur, ex Græco etiam optima fide faceret Latinum Pariſiis editus* 1558, *& poſt eum* Chriſtophorus Clavius, Herigonius, *& nuperrime* Guarini *in* Euclide *adaucto, &* Claudius Millet *de Chales in curſu Mathematico hoc opus illuſtrarunt. Quanquam* *autem* Theodoſius *hic* Tripolites *inſcribatur, eòque nomine à* Suida *etiam memoretur: non dubium tamen quin idem ſit ac* Bithynus *ille* Theodoſius, *profeſſione philoſophus; quem Mathematicis diſciplinis uti & filios ejus, præſtitiſſe, ait* Strabo, *lib.* 12. *Ut* Pompeii *magni temporibus vixiſſe videatur. Nec obſtat quod dicatur* Bithynus. *Nam fortaſſe ex* Bithynia, Tripolin *in* Africam *abiit, atque ibi ſedem fixit. Quomodo* Hipparchus *eidem* Straboni *eſt* Bithynus; *qui* Ptolemæo, *& aliis, eſt* Rhodius. *Scripſit etiam* ϖερὶ οἰκήσεων, de habitationibus, *cujus Argumenti* 12 *Propoſitiones dedit* Merſennius *in Synopſi Mathematica, pag.* 246, *& tribus ſequentibus; & libros* 2, ϖερὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν, de diebus ac noctibus. *Quæ Græcè in Bibliotheca Regia* Lutetiæ, *adſerſantur, Latinè* Argentorati *edi curavit* Petrus Daſypodius, *anno* 1572.

THE-

De Apollonio Pergæo, ex Voſſio de Scriptoribus Mathematicis:

Proximæ poſt *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant eſt Apollonius Pergæus, Claruit enim ſub Ptolomæo Evergete.

N*Atus eſt Perga, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus* Pag. 54.
quod dixi auctor eſt Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Aſcalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro ſexto refert, ut ob conicam hanc ſcientiam à ſuæ ætatis hominibus nuncupatus ſit* magnus Geometra, Euclidis *diſcipulos, quod & ipſum ætatem indicat,* Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepiſſet; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illuſtrare, ac totidem alios adjungere: ut in univerſum conicorum eſſent libri viij: ſicut auctor eſt Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.*

Atque eodem libro alia quoque ejuſdem Apollonii *memorat, vide-* Pag. 55.
licet libros duos περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis ſectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de ſpatii ſectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ ſectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac ſimiliter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἐφεκτικοὺς, in ſe ſolis conſiſtentes: *alios* διεξοδικοὺς, extra ſeſe tendentes.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non eſſe Apollonii Pergæi, *ſed* Pag. 434.
Archimedis *putarent. Exiſtimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium conſignaſſe* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea ſciret necdum edita eſſe ab auctore, involâſſe in illa, proque ſuis edidiſſe. Ac videtur id poſſe ipſius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipſe operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, *ante propoſitionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonſtratum eſſe in libris Conicis. Niſi quis cenſeat, reſpici* Euclidis *quatuor Conicorum libros: quorum* Pappus *mentionem facit in ſeptimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, ſi alienum opus ſignaret* Archimedes *non ſic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonſtraſſe. Et ſanè* Archimedi *non fuiſſe ignotum conos ſecari poſſe planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, ſatis comprobat contra* Eutocium, *& alios,* Guido Ubaldus *initio Commentarii in ſecundum* ἰσορροπικῶν Archimedis. *Quæ cùm conſidero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortaſſe rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque eſt, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Aſcalonita

initio Commentarii ſui in Conica Apollonii. *Atque,* Ariſtæi *judicio,* Pappi *eadem mens fuit.*

Quatuor priores libros primus tranſtulit Joan. Baptiſta Memmius; *ſed infeliciter, eò quòd Argumentum operis non intelligeret: unde, non vidit ſat manifeſtas Græci codicis mendas, ac ſæpe pueriliter hallucinatur: ſicut monitum* Franciſco Maurolyco, *præfatione in Coſmographiam ſuam. Operæ igitur fecit* Federicus Commandinus; *qui denuo Latinè vertit, Bononiæque edidit anno* 1566. *Nec tamen omnia in eo vertendo potuit* Commandinus. *Uſque adeo corruptus erat Græcus codex, quare in Latinis vitioſum ſequi codicem eſt coactus; ut ipſe agnoſcit.*

Alia quoque Apollonii *hujus citant* Proclus *in* Euclidem, *ubi laudatur* Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοκίῳ. *Fortaſſe reſcribendum* τῷ Ὠκυβόῳ. *Quæ vox fuerat à* βοὴ *ſignificante pugnam: ut ſæpe apud* Homerum: Ὠκυβόαι, ταχυμάχαι. *Et quædam recenſet* Eutocius Aſcalonita *libro de dimenſione Circuli*, Eutocius *hic etiam in* Conica Apollonii *commentatus fuit. Eum quoque commentarium Latinè vertit* Commandinus. *Utcunque verò nunc* * *quatuor duntaxat Conicorum libros habeamus, Arabicè tamen tres præterea ex Oriente eſt nactus Clariſſimus* Jacobus Golius, *antehac, in Academia Leidenſi, collega conjunctiſſimus. Cui multum Arabicæ debent literæ ac Matheſis univerſa: plura verò propediem debebunt; præſertim ubi tres illi Conicorum libri viderint lucem. Quærat aliquis quid factum ſit de libro octavo, Cognoſcimus de hoc ex Codice Goliano: ubi ad Calcem erat adſcriptum eò non fuiſſe Arabicè tranſlatum; quia etiam liber ille deſideraretur in Codicibus Græcis, unde Arabes cætera tranſtuliſſent. Sed doctiſſimus* Merſennius, *præfatione in* Apollonii *Conica; quæ ſunt in ejus* Σύνοψιν *Mathematica; Arabicè illum extare ait: imò omnes* Apollonii *libros eâ linguâ legi; ſane plures etiam, quam enumerarit* Pappus. *Atque horum teſtem citat* Aben Nedin; *qui librum contexuit de Philoſophis Arabibus, omniumque eorum ſcripta memoravit, qui fuere à quadringenteſimo poſt* Muhammedem *anno. Interim (ut idem* Merſennius *addit)* Claudii Mydorgii, *patricii Pariſini, ea eſt ſuſpicio tres illos Conicorum libros, qui ab Arabibus* Apollonii *creduntur non eſſe genuinos, verùm ab aliquo ſuppoſitos, qui ſub* Apollonii *nomine facere voluerit fucum. Atque hoc inde colligit; quod libro quinto prima Propoſit in vj.* Apollonii *non tantummodo in Cono recto, ſed in Scaleno etiam quolibet, & portionibus quibuſvis, demonſtret poſſibilia quæque. Meminit auctoris quoque* Vitruvius, *lib.* 1. *cap.* 1. Cardanus *in* 16 *de Subtilitate ei ſeptimum inter ſubtilia orbis ingenia tribuit locum.*

* Anno 1650. antequuam tres poſteriores à Borellio ederentur.

APOL-

APOLLONII
CONICORVM
LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 1

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; ſuperficiem (D A E F G) à recta linea deſcriptam, conſtantémq; ex duabus ſuperficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter ſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam deſcribit in infinitum aucta, voco *Conicam ſuperficiem*.

II.

Verticem ipſius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ ſuperficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

Digitized by Google

V & VII.

Baſim, circulum ipſum (B H C).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano exiſtentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipſa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidiſtantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (~~A~~ B,) qui eſt in ipſa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidiſtantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano exiſtentium, *diametrum* quidem *tranſverſam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipſarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidiſtantes bifariam dividit (in [illegible] H, G)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui ſunt in ipſis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F) poſita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidiſtantes, & inter ipſas interjectas, bifariam ſecat (in ~~Z vel Y~~ X.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Fig. 4.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter eſt, & rectas lineas (C D, C E) bifariam dividit.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri conjugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

Nihilo differunt axes à diametris, niſi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm ſecent.

Apollonius Eudemo.

S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet
*ἀσυμπτώτους. ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. * Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

Theoremata, quæ utilia erunt & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima, & nova ſunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non poſitam eſſe ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipſius tantummodo particulam quandam, atque hanc non ſatis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compoſitio rectè perficeretur abſque iis, quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt; coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem ſcientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & ſimilibus Coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

REctæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) ſuperficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur, in ipſa ſuperficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G ſint in ſuperficie conica, (*a*) recta ipſam deſcribens per puncta A, G tranſibit. Itaque liquet tunc rectam A G in ſuperficie conica exiſtere.

a *1. def. 1. hujus.*

Coroll. 1. Hinc conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum quæ ſunt intra ſuperficiem, recta linea ducatur, intra, & ſi ad aliquod eorum quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.

Digitized by Google

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in ſuperficie, ductæ, baſis circumferentiæ occurrent, ſi opus eſt, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6.

Si in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, ſumantur duo puncta (D,E); & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non pertineat, intra ſuperficiem cadit, quæ verò eſt in directam (E F) cadet extrà.

Conjungantur rectæ A D, A E[a] occurrentes baſis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc[b] intra circulum cadet, ac proinde intra ſuperficiem conicam; ergo[c] planum trianguli A B G eſt intra ſuperficiem conicam; ergo recta D E in ipſo ſita[c] eſt intra eandem. Porro recta A F[d] cadit in B G protractam extra circulum; &[e] proinde extra ſuperficiem conicam; ergo punctum F eſt etiam extra ipſam.

a 2 *Cor.* 1. 2 *hujus.*
b 2. 3.
c 2. 11.
d 10. 3.
e 1. *Cor.* 1 *hujus.*

Prop. III.

Fig. 7.

Si conus (A B C) plano per verticem (A) ſecetur, ſectio (A B C) triangulum erit.

Nam A B & A C[a] rectæ ſunt: item B C[b] eſt recta. [c] ergo ABC eſt triangulum.

a 1. *hujus.*
b 3. 11.
c 20. *def.* 1.

Prop. IV.

Fig. 8.

Si alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, ſecetur plano (D H E) æquidiſtante circulo (B K C), per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, planum (D H E) quod ſuperficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter ſecans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

Planum per axem A F faciat[a] trigonum A B C; communiſque ſectio ejus cum plano D H E[b] ſit recta D F. In ſectione D H E ſumatur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K[c] circumferentiæ baſis occurrens in K, & connectantur G H, F K. Atq; ob D E, B C, ac G H, F K[d] parallelas, erit F B. G D[e] :: (A F. A G[e] ::) F K. G H. unde cùm F B F K[f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales, idémque de reliquis à G ad ſectionem ductis rectis oſtendi poterit. Unde

a 3. *hujus.*
b 3. 11.
c 2. *Cor.* 1. *hujus.*
d *hyp* & 16. 11.
e 4. 6.
f *hyp* & 15. *def.* 2.
g 14. 5.

de ſectio D H E [h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura — h 15. *def.* 1.
A D E conus. — k 4 *def. hujus.*

Coroll. 1. Recta D E eſt diameter circuli D H E. — l

2. Conus A D E [m] ſimilis eſt cono A B C (ob A G. G D :: — m 24 *def.* 11.
A F. F B.)

Prop. V.

Si conus Scalenus ſecetur plano (A B C) per axem ad rectos angu-
los ipſi baſi (B C), ſecetúrque altero plano (G H K) ad triangulum — Fig. 9.
per axem recto, quod ex parte verticis (A) abſcindat triangulum
(A G K) ſimile (ei A B C) quod per axem, * ſubcontrariè vero poſi-
tam; ſectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio ſubcontraria.

In ſectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] duca- — a 11. 11.
tur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem — b 38. 11.
[c] perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; — c 3. *def.* 11.
eſtque planum per D E, H F [d] parallelum baſi B C; [e] efficitque ſecti- — d 15. 11.
onem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia verò ang. — e 4. *hujus.*
A D E [g] = (ang. A B C [h] =) ang. A K G, & ang. K F E [k] = G F D; — f 35. 3.
æquiangula erunt trigona K F E, D F G. unde E F. F K [l] :: G F. F D. — g 29. 1.
ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare ſectio G H K — h *hyp.*
eſt circulus. Q.E.D. — k 15. 1.

l 4. 6.
m 16. 6.
n *priùs.* o *conv.* 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſumatur autem aliquod
punctum (D) in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per — Fig. 10.
axem; & ab ipſo ducatur recta linea (D E) æquidiſtans cuidam re-
ctæ (M N), quæ perpendicularis eſt à circumferentia circuli (BMC)
ad trianguli baſin (B C); trianguli per axem occurret, & ulteriùs
producta uſque ad alteram ſuperficiei partem, biſariam ab ipſo trian-
gulo ſecabitur.

Recta A D protracta circumferentiæ baſis occurrat puncto K; per
quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo — a 30. 1. b
D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad
ſuperficiem G.

Liquet rectam A L, (cùm ſit in plano A D E, vel A K L, & in ſu-
perficie coni) ipſi D F occurrere in G. & ſore K H. D F :: (A H.
A F ::) H L. F G. unde quum ſit K H = H L, erit D F = F G.
Q.E.D. *Prop.*

Digitized by Google

Propoſ. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano (D F E) ſecanti planum baſis coni, ſecundùm rectam lineam (D E) quæ ſit perpendicularis, vel ad (B C) baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: lineæ (H K) quæ à ſectione (D F E), in ſuperficie coni à plano facta, ducuntur æquidiſtantes ei (D E), quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim (B C), in communem ſectionem (F G) plani ſecantis, & trianguli per axem, cadent. Et ſiquidem conus ſit rectus linea (D E), quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad (F G) communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, ſi verò Scalenus, non ſemper, niſi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad baſim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi ſectioni F G occurrat, inque ipſo occurſu biſecetur, liquet ex præcedenti. Porro, ſi conus rectus ſit, erit circulus B C plano A B C
a 4: *def.* 11. rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G
perpendicularis. Idem diſcurſus valet, ſi trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; ſin hoc non fuerit, non erit D E ad F G per-
b 4. 11. pendicularis: Nam ſi D E utrique B C, F G perpendicularis ſit, [b] erit
d 18. 11. eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C
rectus erit, contra Hypoth.

Coroll. Hinc F G diameter eſt ſectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas biſecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus ſecetur plano (A B C) per axem, & ſecetur altero plano (D F E) ſecanti baſim coni (B D C) ſecundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; diameter autem (F G) ſectionis factæ in ſuperficie, vel æquidiſtet uni (A C) laterum trianguli, vel cum ipſo extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum ſuperficies coni (A B C) tum planum ſecans (D F E); ſectio quoque ipſa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) ſectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem
FGM (~~GFH~~) abſcindet linea (M N H), quæ quidem à coni ſectione (M F N) ei (D E) quæ eſt in baſi, æquidiſtans ducta fuerit.

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam conveniet, ſi ipſa ad [b] libitum producatur, puta ad H, & per H ducantur K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano B D C E parallelum erit, inque ſuperficie coni producta [d] circulum efficiet, ad quem ſi protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum, & ſectionem D F E &c.

a Hyp.
b 3. 1.
c 15. 11.
d 4. hujus.

Prop. IX.

Si conus (A B C) ſecetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque baſi (B C) æquidiſtet, nec ſubcontrariè ponatur, ſectio (D K E) circulus non erit. Fig. 13. 14.

Si fieri poteſt, ſit D K E circulus; & ab H baſis centro ad F G (communem ſectionem baſis cum plano ſecanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem tranſeat trigonum A B C. Dein ſumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi ſectioni plani ſecantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde $KM = ML$.

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per N X, K L, [b] plano B C parallelum eſt, * ideóque circulum efficit. In quo K L [b] diametro N X [c] eſt perpendicularis, erit N M × M X [d] = (K Mq ([d] =) D M × M E. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. ~~X~~ M :: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X ſimilia ſunt: & ang. M E X = (ang. D N M [h] =) ang. A B C. Itaque ſectio eſt [k] ſubcontraria, contra Hyp. ergo ſectio D K E non eſt circulus. *Q. E. D.*

a 6. hujus.
b 15. 11.
* 14. hujus.
c 10. 11. (6.
d cor. 13. & 10. D
e hyp.
f 16. 6. g 6. 6.
h 29. 1.
k 5. hujus.

Prop. X.

Si in coni ſectione (F E D) ſumantur duo puncta (G, H); recta linea (G H), quæ ejuſmodi puncta conjungit, intra ſectionem cadet, & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra. Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] ſunt extra latus trigoni (A B C) per axem ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra conum cadet, ac proinde intra ſectionem; ſin producatur extra conum cadet, ac proinde extra ſectionem.

a hyp.
b 2. hujus.

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero Fig. 16.

plano (DFE), ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam (DE), quæ ad baſim (BC) trianguli per axem ſit perpendicularis, & ſit ſectionis diameter (FG) uni (AC) laterum trianguli per axem æquidiſtans; recta linea (KL) quæ à ſectione ducitur æquidiſtans ſectioni (DE) plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum (FG), poterit ſpatium æquale contento, lineâ (FL), quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam (KL) & ſectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (FH) quæ ad lineam (AF) inter coni angulum (A) & ſectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum baſis (BC) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (AB, AC) continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio PARABOLE.

a 15. 11.
b 4. *hujus.*
c 10. 11.
d *cor.* 13. & 16. 6.
e 1. 6.
f *hypoth.*
g 23. 6.
h 4. 6.
k 2. 6. 19. 5.

Per L ducatur MN ad BC parallela; éſtque ſectio plani per MN, KL ducti (ad BDCE [a] paralleli) [b] circulus; [c] & KL ad MN perpendicularis; [d] unde $KLq = ML \times LN$. Porro $FL \times HF.\ FL \times FA$ [e] :: (HF. FA [f] :: BCq. $AC \times AB$ [g] = BC. AC. [h] (ML. FL) + BC. AB [h] (ML. FM, [k] vel LN. FA) = ML. FL + LN. FA [g] =) $ML \times LN.\ FL \times FA$. [l] ergo $ML \times LN$ ([d] KLq) $= FL \times HF$. *Q. E. D.*

Propoſ. XII.

Si conus plano (ABC) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano (DFE) ſecanti baſim coni ſecundùm rectam lineam (DE) quæ ad baſim (BC) trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter (FG) producta, cum uno latere (AC) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (MN), quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni (DE) plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium (FNXP) adjacens lineæ (FL), ad quam ea (FH), quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditúrque angulo (FAH) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (AK) quæ diametro (FG) æquidiſtans, ab vertice (A) ſectionis uſque ad trianguli baſim (BC) ducitur, ad rectangulum baſis partibus (BK, KC), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (FN), quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam (MN), & ſectionis verticem (F) interjectam, excedénſque figurâ ([illegible]OL) ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ continetur lineâ (HF) extra angulum ſubtenſâ, & ea (FL), juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum (FG) applicantur. Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Hyperbole.*

Fig. 17.

PX

Per N ducatur RS ad BC parallela. Eſtque FN × HN. FN a 1. 6.
× NX[a] :: (HN. NX)[b] :: HF. FL[c] :: AKq. BK × KC[d] = AK. b 4. 6.
BK ([b]FG. GB, [b] vel FN. NR) + AK. KC. ([b]AG. GC. [b] vel c hyp.
HN. NS.) = FN. NR + HN. NS [d]=) FN × HN. NR × NS. d 23. 6H
ergo FN × NX[e] = (NR × NS[f] =) NMq. Q. E. D. e 9. 5.
f 4. hujus, & cor. 13, ac 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 18.

Si conus plano (ABC) per axem ſecetur, & ſecetur altero plano (ELD) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, nec ſubcontrariè ponatur; planum autem, in quo eſt coni baſis (BC), & ſecans planum conveniant ſecundùm rectam lineam (FG) quæ ſit perpendicularis vel ad baſim (BC) trianguli per axem, vel ad eam (BCK), quæ in directum ipſi conſtituitur; recta linea (LM) quæ à coni ſectione ducitur, æquidiſtans planorum communi ſectioni (FG) uſque ad ſectionis diametrum (ED) poterit ſpatium (EOXM) adjacens lineæ (EH), ad quam ſectionis diameter (ED) eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ (AK) diametro (ED) æquidiſtantis à coni vertice (A) uſque ad trianguli baſin (BC) ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus (BK, CK), quæ inter ipſam (AK) & rectas trianguli lineas (AB, AC) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (EM), quæ ex diametro (ED) ab ipſa abſcinditur ad ſectionis verticem (E): deficienſque figurâ (OHNX) * ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ diametro (ED) & lineâ (EH) juxta quam poſſunt, continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio *Ellipſis*.

Per M ducatur PMR ad BC parallela. Eſtque EM ×. DM. EM. a 1. 6.
× MX[a] :: (DM. MX[b] :: DE. EH[c] :: AKq. BK × KC[d] = AK. BK b 4. 6.
([b]EG. GB. vel [b] EM. MP) + AK. KC. ([b]DG. GC. [b] vel DM. c hyp.
MR) = EM. MP + DM. MR [d]=) EM × DM. MP × MR. d 23. 6.
ergo EM × MX[e] = (MP × MR[f] =) MLq. Q. E. D. e 9. 5.
f 4. hujus. & cor. 13. & 16. 6.

Prop. XIV.

Fig. 19.

Si ſuperficies (BCAXO), quæ ſunt ad verticem (A), plano non per verticem ſecentur, erit in utraque ſuperficierum ſectio (DEF, & GHK) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum ſectionum eadem erit diameter (ME, HN), lineæ verò (EP, HR), juxta quas poſſunt ordinatæ ad diametrum, æquidiſtantes ei, quæ eſt in baſi coni, inter ſe æ-

quales

quales erunt. Et figuræ tranſverſum latus (E H) utrique commune; quæ ſcilicet inter ſectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujuſmodi ſectiones *Oppoſitæ*.

Quòd utraque ſectio D E F, G H K, ſit Hyperbole, liquet ex 12mâ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, eſt
a 4. 6. A S. B S[a] :: A T. T O. & A S. S C[b] :: A T. T X. Unde A Sq.
b hyp. B S. × S C ([b]hoc eſt H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b]hoc eſt E H.
c 9, 5. H R). [c] quare E P = H R.

Prop. XV.

Fig. 20. Si in Ellipſi à puncto (C) quod diametrum (A B) biſariam dividit,
Fig. 21. ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad ſectionem producatur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à ſectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidiſtans, poterit ſpatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipſam & ſectionem interjicitur, deficienſque figurâ (M K) ſimili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam poſſunt. Quòd ſi ulterius producatur (G H) ad alteram ſectionis partem (V), biſariam ſecabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam poſſunt applicatæ ad A B: junctâque
B N, per G ducatur G X ad D E parallela, perque C & X ipſæ X O,
a 13. hujus. b 4. 6. C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipſi A B parallelæ N R, O S,
c hyp. P T. Liquet igitur eſſe D Cq[a] = rectang. A P. & G Xq[a] = rectang.
d 1. 6. A O. Et ob A N. C P. (A T) [b] :: (A B. C B[c] :: 2. 1.) erit
e 2. ax. 1. T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T[d] =
f 43. 1. Y T[e] = N S (ob T O[f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) +
g 5. 2. O P[e] = (rectang N P[d] = A P[a] = C Dq[g] =) H Cq (G Xq) +
h 3. ax. 1. k 1. 6. H E × H D. & proinde rectang. H E × H D[h] = rectang. O P. (P S
l 4. 6. × S O). Item H E × H D. H L × H D[k] :: (H E. H L[l] :: D E. D F[m] ::
m cor. 20. 6. D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ÷÷)[o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel
n hyp. o 15. 5. P C × C B). C Bq[k] :: P C. C B[k] :: P S. S O[p] ::) P S × S O. [h](H E
p 23. 6. × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q[r] =) H Gq. Quod erat
q 9. 5. primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter
r 34. 1. A X × X O[a] = (G Xq[r] = V Qq[a] =) A Q × Q Z[s], erit A Q. A X[s] ::
s 14. 6. (X O. Q Z[s] ::) X B. Q B. ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B.

quare XA = QB. item CA [v]= CB. [x] ergo CX = CQ; [t] hoc eſt HG = HV. Quod erat ſecundum. t 9. 5: v hyp. x 3. ax. 1.

Coroll. Itaque DE eſt diameter altera priori AB conjugata.

Schol.

Breviùs ita Calculum inſtituemus.

Sint { BC, vel CA = d.
AN = r.
CX, vel HG = a. Fig. 22.

Eſt igitur { BX = $d + a$.
AX = $d - a$.

Eſt autem $2d.r :: d+a.\frac{r}{2}+\frac{ra}{2d}$ quare $d-a$ (AX) × : $\frac{r}{2}+\frac{ra}{2d}$, hoc eſt $\frac{dr}{2}-\frac{raa}{2d}$ = GXq vel HCq. Item quia $2d.r$ (BA. AN) :: d. (BC). $\frac{r}{2}$. erit d(BC) × $\frac{r}{2}$, h.e. $\frac{dr}{2}$ = DCq. Ergo DCq − HCq (h. e. HE × HD) = $\frac{raa}{2d}$. Porrò quia DCq. BCq (hoc eſt $\frac{dr}{2}.\ dd$) :: DEq. ABq :: DE. DF (ob DE, AB, DF $\div\div$) :: HE. HL :: HE × HD. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. HL × HD :: $\frac{dr}{2}.\ dd :: \frac{r}{2}.\ d :: \frac{raa}{2d}.\ aa$. Erit HL × HD = aa = HGq.

Simili diſcurſu erit HL × HD = HVq: unde HG = HV.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod tranſverſum latus (AB) oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, recta quædam linea (CD) ordinatim applicetur, ipſarum diameter erit, priori diametro (AB) conjugata. Fig. 23.

Recta quæpiam GH ad AB parallela ſectionibus occurrat punctis G, H, à quibus ordinatim applicentur GK, HL; ſintque AE, BF a 13. hujus.
recta ſectionum latera; & junctæ AF, BE producantur; ducan- b 34. 1.
túrque KM, LN ad AE, BF parallelæ. Eſtque AK × KM [a] = c 1. 6.
(GKq [b]= HLq [a]=) BL × LN. Item AK × KM. AK × KB [c] :: d 4. 6. (5.
(KM. KB [d] :: AE. AB [e] :: BF. BA [d] :: LN. LA [c] ::) BL × e 14. hujus, et 7
LN. BL × LA. ergo (ob AK × KM [f] = BL × LN) [g] erit AK × f priùs.
KB = BL × LA. [h] quare KB. BL :: LA. AK, & componendo g 14. 5.
h 14. 6.

KL.

k 9. 5. KL. BL :: LK. AK. [k] ergo $BL = AK$. & [l] proinde $CL = CK$;
l *hyp.* & 3. *ax.* [m] hoc eſt $XH = XG$. [n] ergo CD eſt diameter, quippe quæ ipſam
m 34. 1.
n 12. *def. hujus.* GH, & ſimiliter omnes ad AB parallelas biſecat.

Coroll. 1. Si $GK = HL$, erit $AK = BL$; & $BK = AL$. ac inde $BK \times AK = AL \times BL$.

2. Viciſſim, ſi $AK = BL$, vel $BK = AL$. erit $GK = HL$. & $BK \times AK = AL \times BL$.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Fig. 24. 25. 1. Punctum (C), quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum (A B) bifariam dividit, Centrum ſectionis dicatur.

2. Et quæ à centro (C) ad ſectionem perducitur (C B) vocetur ex centro ſectionis.

3. Similiter & punctum (C) quod tranſverſum latus (A B) oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, Centrum vocetur.

4. Quæ autem (D E) à centro ducitur æquidiſtans ei (G K), quæ ordinatim applicata eſt, mediámque proportionem habet inter latera figuræ (A B, B F) & bifariam ſecatur à centro (C), ſecunda diameter appellatur.

Brevitatis causâ, Tranſverſum latus, Rectum latus, & ſecundam diametrum elementis T, R, M deſignabimus: unde

* *Cor.* 20 6. *Coroll.* * Tq. Mq :: T. R. (ob T, M, R ∺.)
& $CDq = \frac{1}{4} DEq \doteq \frac{Mq}{4} = \frac{1}{4} T.R.$

Viam jam munit ad ſingularum ſectionum proprietates primas, & præcipuas eliciendas.

Prop. XVII.

Fig. 26. Si in coni ſectione (C A D), ab ipſius vertice (A) ducatur recta linea (A C) æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, extra ſectionem cadet.

a 7. *hujus.* Nam ſi dicatur intra cadere, [a] ergo biſecabitur à diametro; quod
b 10. *hujus.* fieri nequit, [b] cùm producta extra ſectionem cadat.

Prop.

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) ſectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra ſectionem cadat; ſumatur autem aliquod punctum (C) intra ſectionem, & per ipſam ei (A B), quæ ſectioni occurrit, ducatur æquidiſtans (C D); ducta linea (C D), & producte, ex utraque parte ſectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in ſectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipſi C D occurret; & ſiquidem inter puncta E F, manifeſtum eſt ipſam ſectioni occurrere; ſin extra, tum priùs cum ſectione conveniet. Similí diſcurſu ad partes A F ſectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni ſectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in ſectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & ſiquidem inter puncta A D, tum B C [a] protracta ſectioni occurret, ſin extra, priùs. [a] 10. *hujus.*

Prop. XX.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à ſectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter ſe, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipſis ex diametro ad verticem abſcinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq [a] = A E × A G. [a] & D Fq = A F × A G. ergo C Eq. D Fq [b] :: (A E × A G. A F × A G [c] ::) A E. A F. *Q. E. D* [a] 11. *hujus.* [b] 7. 5. [c] 1. 6.

Converſim. Si ſit C Eq. D Fq :: A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. $DF \sqsubset CE$.

Hæc prima & præcipua eſt parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipſi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad ſpatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipſas, & vertices (A, B) tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad tranſverſum (A B); inter ſe verò ut ſpatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes pro-
a 4. 6. ductæ B C in H, & K. Eſtque C A. A B[a] : : (H E. E B[b] : :) H E
b 1. 6. × E A([c] hoc eſt D Eq). E B × E A. Simili diſcurſu C A A B : : F Gq.
c 12. *hujus.* G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A[d] : : F Gq. G B × G A. & vi-
d 11. 5. ciſſim D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A.

GF *Coroll.* In hyperb. ~~E E~~ $\sqsubset$ D E. (in ellipſi uſque ad conjugatam ipſi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decreſcere) *Sch.*

Converſim; ſi fuerit D Eq. E B × E A : : R T. vel D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum ſectionum.

Hæc prima eſt & præcipua harum ſectionum proprietas, ex ipſarum definitione reſultans.

Coroll. D Eq. E B × B A : : ~~Tq~~. Mq. Tq.

Viam jam ſternit ad ſectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Si Parabolen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis
Fig. 31. (C, D) ſecet, non conveniens cum ſectionis diametro (A B) intra ſe-
32. ctionem, producta cum eâdem diametro extra ſectionem conveniet.

a *cor.* 20. & Ordinatim applicentur C E, D B: ſunt hæ inæquales, &[a] minor
b *cor.* 21. *hujus.* D B,[b] ergo juucta C D producta cum E A conveniet extra ſectionem
ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

*id eſt, conjugatas. Si ellipſin ſecet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra ſectionem.

Fig. 33. Ordinatim applicentur E G, F H. atque ob E Gq. F Hq[a] : : B G
a 21. *hujus.* × G A. B H × H A,[b] & B G × G A $\sqsubset$ B H × H A (eſt enim punctum
b 5. 2. G propiùs centro M, quàm punctum H);[c] erit E Gq $\sqsubset$ F Hq. &
c 14. 5. E G $\sqsubset$ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad
partes

partes A. Simili diſcurſu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G ⊏ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra ſectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in ſectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decuſſat ipſa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A ſcilicet & ſectionem. [a] 22. *hujus.*

Prop. XXV.

Si ellipſi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra ſectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K; hæc diametro A B eſt parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili diſcurſu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) ſectionis diametro (A B) æquidiſtans, in uno tantùm puncto (E) cum ſectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cum ſectione, patet, (quoniam diſtantia parallelarum C D, A B eſt finita, ſectio autem in infinitum poteſt augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad ſectionem, excedet iſtam diſtantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores ſint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nuſquam convenire cum ſectione, præterquam in E. [a] *cor.* 20. & *cor.* 21. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) ſecet recta linea (C D), producta in utramque partem cum ſectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; ſi C D huic parallela ſit,

a 19. *hujus.*
b 17. *hujus.*
c 11. 6.
d 19. 5.
e 4. & 22. 6.
f 22. 6.
g *conſt.* & *cor.* 20. 6.
h *conv.* 20. *hujus.*

[a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere; ſin minùs, producta conveniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G; ordinatim igitur applicetur G F; [c] fiátque A F. A D :: A D. A B. [d] unde F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit, F Dq. D Bq. ([e] hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] :: A F. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſectione: quare C D utrinque ſectioni ocurrit.

Prop. XXVIII

Fig. 38.

Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

a 4. 6.
b *conſtr.*
c 14. 5.
d *conſtr.* & *Sch.* 48. 1.
e 7. 5.
f 21. *hujus.*

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G. Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela, ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque G M = H L; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumento ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.*
b *conſtr* & *ſch.* 48. 1.
c 14. 5.
d *conſtr.*
e 29. 1.
f 4. 1.
g *Sch.* 15. 1.

Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = A F; & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. éſtque B F × A F. D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G × B G. [c] erit D Fq = G Eq. & D F = G E. [d] Item C F = C G. & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E; [g] quare linea D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.

Coroll. 1. D F = E G.
2. C D = C E; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop.

Prop. XXX.

Si in ellipſi vel oppoſitis ſectionibus ducatur recta linea D E, ad utraſque partes centri (C) ſectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam ſecabit. Fig. 40.

In oppoſitis ſectionibus patet [*] ex præcedenti. In ellipſi verò ad diametrum A B ordinatim applicentur D F, EG. Et quoniam B F × F A. A G × G B [a] :: (D Fq. G Eq [b] ::) F Cq. G Cq. & permutando B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. (B F [c] × F A + C Fq). F Cq : : B Cq. [c] (A G × GB + G Cq) G Cq. ſitque A C [d] = B C. [e] erit F C = G C; & propterea C D [f] = C E.

Coroll. C G = C F, & G E [f] = D F ; & G B [g] = F A. & BF [g] = A G. & B F × F A [h] = A G × G B.

[*] cor. 2. præc.
[a] 21. hujus.
[b] 4. 6. & 22. 6.
[c] 5. 2.
[d] conſtr & 10. def. hujus.
[e] 14. 5.
[f] 4. 6.
[g] 3. ax. 1.
[h] Sch. 48. 1.

Prop. XXXI.

Si in transverſo figuræ latere (A B) hyperbolæ, ſumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abſcindens ad verticem ſectionis, quàm ſit dimidia tranſverſi lateris (A B) figuræ, & ab ipſo (C) recta linea (C D) ſectioni occurrat, ſi producatur, intra ſectionem ad ſequentes ipſius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, [*] F E G. Et quia C Gq. C Bq [a] ⊏ C Hq. C Bq. erit per converſam rationem CGq. C Gq — C Bq ⊐ C Hq. C Hq — C Bq. & inverſè C Gq — C Bq. C Gq ⊏ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq — C Bq. [b] (A G × G B.) C Hq — C Bq [b] (A H × H B) ⊏ (C Gq. C Hq [c] ::) GEq. H Dq). ergo cum A G × G B. A H × H B [d] :: G Fq. H Dq. erit G Fq. H Dq [e] ⊏ G Eq. H Dq. [f] ergo G F ⊏ G E. ergo C D E intra ſectionem cadit.

[*] utcunque hæc ad partes E.
[a] 8. 5.
[b] 6. 2.
[c] 4. & 22. 6.
[d] 21 hujus.
[e] 13. 5.
[f] 10. 5.

Quòd ſi ab aliquo puncto in A C (poſito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipſam C D decuſſabit in D, adeóque magis intra ſectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum ſecat inter verticem, & centrum ſectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis ſecat (vel quæ tangenti parallela eſſe poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

Digitized by Google

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni ſectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidiſtans, ſectionem continget, & in locum (CAG), qui inter coni ſectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. Si fieri poteſt, cadat A D, & à puncto D (utcunque ſumpto in A D)
44. ordinatim applicetur D G E. Sintque A F, B A latera figurarum. Jam
in parabola fiat A F. A H :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D
a 11. *hujus.* parallela, ſectioni occurrens in L. Eſtque A F × A H [a] (L Hq). AHq
b 1. 6. [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH.
c *conſtr.*
d 4. & 22. 6. [f] *Q. E. A.*

e 9. 5. In reliquis ſectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; &
f 9. *ax.* 1. per E ducatur E M N ad A F parallela, fiátque A E × E N = D Eq;
& juncta A N ſecet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad A C
g 12. *hujus.* parallelæ. Eſtque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [b] :: (X H. A H [h] ::
h 4. 6. N E. E A [b] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo
L Hq [f] = K Hq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

Cor. Si duæ ſectiones ſeſe contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, ſumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (CD) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipſa ex diametro abſcinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) quod ſumptum fuerat, ſectionem continget.

a *Not. infra.* Sumpto utcunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B,
b 4. *ax.* 1. ſectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] $\sqsupset$ A Eq $+$
c 4. 2. E Bq; erit 4 A E × E B [b] $\sqsupset$ (A Eq $+$ E Bq $+$ 2 A E × EB [c] =)
d 13. 5. A Bq; [e] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq
e 1. 6. [d] $\sqsupset$ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E ×
f 20. *hujus.* E D ([e] hoc eſt, E B. E D, [f] vel G Bq. C D q) $\sqsupset$ A Bq. A Dq.
g 4. & 22. 6. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D $\sqsupset$ F B. C D. [k] quare G B
h 22. 6.
k 10. 5. $\sqsupset$ C D: unde punctum F eſt extra ſectionem; idémque de reliquis
FB

rectæ A C punctis ſimili diſcurſu oſtendetur. ergo recta A C F ſectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B ⊐ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = z *cor.* 7. 2.
2 A E × E B + Quad: A E — E B ([z] hoc eſt + A Eq + E Bq
— 2 A E × E B).

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum (C), ab eóque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos tranſverſi lateris (A B) figuræ, eandem habeant inter ſe (B E, E A) partes lateris tranſverſi, ita ut quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant (B D. D A :: B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in tranſverſo latere ſumitur, & punctum (C) quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, ſecti- a 4. 6.
oni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F b *hyp.*
paralleloe, & protrahantur D C K, B C X, G C M. Eſtque B K. c 9. 5.
A N [a] :: (B D. D A [b] :: B E. E A [a] :: B C. C X [a] ::) B K. N X. [c] er- d 5. 2.
go N X = A N. quare N X × A N [d] ⊏ A O × O X. [e] ideóque N X. e *Not.* 2. *infra.*
O X [f] (hoc eſt K B. M B) [e] ⊏ A O. A N unde K B × A N ⊏ M B f *Not.* 1.
× A O. [g] ergo K B × A N. C Eq ([h] hoc eſt B D × D A. D Eq.) ⊏ g 8. 5.
B M × A O. C Eq [h] (hoc eſt B G × G A. G E q) & permutando h 3. *Not.*
B D × D A. B G × G A [k] (hoc eſt C Dq. H Gq) ⊏ D Eq. G Eq. k 21. *hujus.*
[l] (C Dq. F Gq) [m] ergo C D. H G ⊏ C D. F G. [n] ergo H G ⊐ F G. l 4, & 22. 6.
quare punctum F extra ſectionem exiſtit. Quare E F ſectionem con- m 22. 6.
tingit. n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd ſit N X. O X :: K B. M B; ſic patet: quoniam N O.
K M [o] :: (O C. C M [o] ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: o 4. 6.
K M. M B. erit componendo N X. O X :: K B. M B.

2. Quòd ſit N X. O X ⊏ A O. A N, ſic oſtenditur. Sit R × S p *ſch.* 43. 1.
⊏ X × Y. Dico R. X ⊏ Y. S. Sit enim R S = X Z. [p] ergo Z ⊏ q 8. 5.
Y. [q] ergo Z. S [r] (hoc eſt R. X) ⊏ Y. S. r 17. 6.

3. Quòd ſit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita conſtabit:
quoniam A N. C E [s] :: A D. D E. & C E. K B [s] :: D E. D B erit ex s 4. 6.
æquo

Digitized by Google

t 1. 6. æquo A N. K B [t] (A Nq. A N × K B) :: A D. D B [t] (A Dq. A D ×
u 4. & 22. 6. D B). [u] Item C Eq. A Nq :: D Eq. A Dq. ergo rurſus ex æquo C Eq. A N × K B :: D Eq. A D × D B, ac inverſè.

Coroll.

Hinc ſi $\frac{T \times AD}{T + 2AD} = AE$ in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipſe, erit E C tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (A C) contingat, conveniens cum diametro (A B) extra ſectionem (in A), quæ (C B) à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam (B G) æqualem ei (G A), quæ inter ipſam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui eſt inter contingentem, & ſectionem, alia recta linea non cadet.

Si fieri poteſt, ſint A G, G B inæquales; ipſique A G æqualis ponatur G E; & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta A F ſectionem
a 33. *hujus.* contingent, & rurſus occurret ipſi A C. [b] *Q. E. A.*
b 14. *ax.* 1.

Porro dic aliquam D C ſectionem inter & A C cadere; fiátque G E = G D. & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta D F tanget ſectionem, ipſámque D C iterum decuſſabit. [b] *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. 50. Si hyperbolen vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (C D) conveniens cum tranſverſo figuræ latere (B A), & à tactu recta linea (C E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; erit ut linea (B D) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) tranſverſi lateris ad (D A) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (B E), quæ eſt inter ordinatim applicatam (C E) & lateris terminum (B) ad eam (E A), quæ eſt inter eandem (C E) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent (B D. D A :: B E. E A). Et in locum, qui inter contingentem, & ſectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. *hujus.* Si enim non ſit B D. D A :: B E. E A; ſit B D. D A :: D G. G A.
b 14. *ax.* 1. & ordinatim applicetur G F; [a] ergo ducta D F ſectionem continget, iterúmque conveniet cum recta [b] D C. *Q. E. A.*

Quinetiam ſi aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim: [a] itaque juncta H F ſectionem continget, [b] ipſamq; D G bis decuſſabit. *Q. E. A.*

Cor. Hinc ſi C D tangat, erit in hyperbola $A\underset{E}{G} = \frac{T \times AD}{T - 2\,AD}$; in ellipſe $A\underset{E}{G} = \frac{T \times AD}{T + 2\,AD}$.

Not. In hyperbola $A\underset{E}{G} \sqsubset AD$: quia $T - 2\,AD \sqsupset T$.
In ellipſe $A\underset{E}{G} \sqsupset AD$, quia $T + 2\,AD \sqsubset T$.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & à tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & ſectionis centrum (F), unà cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & ſectionis centrum (F); continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ eſt ex centro ſectionis; ſed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ (CE), eandem proportionem habet, quam tranſverſum figuræ latus ad rectum. Fig. 51. 52.

Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B a 36. *hujus.*
:: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per converſam rationem, F E. F B ::
F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.* b 17. 6.
Item, inverſè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B — F D). c *hyp.*
E B (F E — F B). ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo d 19. 5.
F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. e 16. 6. f 7. 5.
C Eq [g] ::) T R. *Q. E. D.* g 21. *hujus.*
In Ellipſi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. h 17. 6.
D B. erit quoque (bipartiendo antecedentes,) F B. E B :: F D. D B. k 3. 2.
& per converſam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = l 5. 2.
F Bq. hoc eſt D E × F E + F Eq [k] = (F Bq =) A E × E B + F Eq m 3. *ax.* 1.
[m] ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. n 7. 5.
C Eq [o] ::) T. R. o 21. *hujus.*

Coroll. F E, F B, F D ſunt $\div\!\div$.
F E. E B :: F B. D B.
F B. B E :: F D. D B.
F B. F D :: B E. D B.

☞ Hinc methodus ex dato puncto in diametro, vel ſectione contingentem ducendi.

Converſim: ſi $FE \times FD = FBq$: vel ſi $DE \times FE . CEq :: T,R.$ erit recta CD tangens ſectionis.

Prop. XXXVIII.

Fig. 53.
54.
55.
56.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam recta linea (FL) contingens in (E), cum ſecundâ diametro (CD) conveniat, & à tactu (E) ad diametrum (CD) applicetur linea (EH) æquidiſtans alteri diametro (AB); quæ (HG) interjicitur inter applicatam (EH) & ſectionis centrum (G) unà cum interjecta (FG) inter contingentem, & ſectionis centrum, continebit rectangulum, æquale quadrato quod fit ex (GC) dimidia ſecundæ diametri: ſed unà cum ea (HF) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, ſpatium continebit, quod ad quadratum applicatæ (EH) eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad tranſverſum.

a 23. 6.
b 34. 1 & 4. 6.
c 37. *hujus.*
d *cor. def. ad* 16. *hujus.*
e *hyp.*
d 15. 5.
e 37. *hujus.*
f 14. 5.

Ordinatim applicetur EM. Eſtque $GM \times GL . HG \times FG$[a] $= GM . HG + GL . FG$[b] $= GM . EM + LM . EM$[a] $= GM \times LM . EMq$[c] $= T . R$[d] $:: Tq . Mq$ ([e] $ABq . CDq$[d] $::$) $AGq . CGq$. ergo cùm AGq[e] $= GM \times GL$[f]. erit $CGq = HG \times FG$. *Q.E.D.*

Porro, inverſè $R . T =$ ($HG . GM + FG . GL$[b] $= HG . HE + FH . HE$[a] $=$) $HG \times FH . HEq$.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt. Ut linea (CF), quæ inter tangentem, & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam (FD), quæ inter tangentem, & alterum terminum ſecundæ diametri, ita eſſe lineam (DH), quæ eſt inter alterum terminum, & applicatam, ad eam (CH) quæ inter alterum terminum & applicatam.

g *priùs.*
h *hyp. & ſch.* 48. 2.
k 14. 6.

Nam ob $FG \times HG$[g] $=$ (CGq[h] $=$) $CG \times GD$, [k] erit $FG . GD :: CG . GH$. & per converſam rationem $GF . FD :: GC . CH$. & duplicando antecedentes, $CF + FD . FD :: DC . CH$. & dividendo $CF . FD :: DH . CH$. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Si $FG \times GH = GCq$. vel $FH \times HG . HE :: R . T$. erit EF tangens.

2. $FG \times GH = \frac{1}{4} TR$.

Prop.

Digitized by Google

Prop. XXXIX.

Si hperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat (in D); & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C E); ſumptâ quàvis lineâ ex duabus, quarum altera (E F) interjicitur inter applicatam (C E), & ſectionis centrum (F); altera (E D) inter applicatam, & contingentem (C D); habebit ad eam applicata (C E) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum (E F, E D) ad applicatam (C E), & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. Fig. 57. 58.

Sit E F. C E :: G. E D. [a] vel E F × E D = C E × G. ergo C Eq. C E × G [b] (C E. G) [c] :: (C Eq. E F × E D :: [d]) R. T. atqui C E. E D [e] = C E. G + G. E D ([f] + E F. C E.) ergo C E. E D = R. T. + E F. C E. *Q. E. D.*

a 16. 6.
b 1. 6.
c 7. 5.
d 37. *hujus.*
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XL.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam recta linea (A H) contingens (in A) conveniat cum ſecunda diametro (D E); & à tactu (A) ad eandem diametrum (D E) applicetur linea (A G) æquidiſtans alteri diametro (B C); ſumptâ quâlibet lineâ ex duabus; quarum una (G F) inter applicatam (A G) & ſectionis centrum (F) interjicitur, altera (G H) inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata (A G) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum (G F, G H) habet ad applicatam (A G). Fig. 59. 60.

Sit G H. A G :: K. G F. [a] vel G H × G F = A G × K. ergo A Gq. G H × G F [b] (T. R.) [c] :: (A Gq. A G × K [d] ::) A G. K. atqui A G. G F [e] = A G. K + K. G F [f] (+ G H. A G). ergo A G. G F = T. R. + G H. A G. *Q. E. D.*

a 16. 6.
b 38. *hujus.*
c 7. 5.
d 1. 6.
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XLI.

Si in hyperbola, vel Ellipſi, vel circuli circumferentia ordinatim applicetur recta linea (CD) ad diametrum (AB); & ab applicata (C D), & ea (E A) quæ ex centro, deſcribantur parallelogramma æquiangula Fig. 61. 62.

Digitized by Google

augula (D G, A F); habeat autem applicata (C D) ad reliquum latus (C G) parallelogrammi (D G) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet ea quæ ex centro (E A) ad reliquum latus (E F), & ex proportione, quam rectum figuræ ſectionis latus (R) habet ad tranſverſum (T); parallelogrammum factum à lineâ (E D) quæ inter centrum (E) & applicatam (C D) interjicitur, ſimile parallelogrammo (A F), quod fit ab ea (E A) quæ ex centro, in hyperbola quidem majus eſt, quàm parallelogrammum (D G) ab applicata (D C), parallelogrammo (A F) ab ea (E A) quæ ex centro; In ellipſi verò, & circuli circumferentia, unà cum parallelogrammo (D G) quod fit ab applicata, æquale eſt parallelogrammo (A F) ab ea, quæ ex centro.

a 21. *hujus.*
b 1. 6.
c 9. 5.
d *conſtr.*
e *hyp.*
f 5. *def.* 6.
g 1. 6.
h *priùs* & 7. 5.
k 22. 6.
l 6. 2.
m 19. 5.
n 5. 2.
o 22. 6.

Fiat R. T [a] (hoc eſt D Cq. B D × D A) :: D C . C H [b] (hoc eſt D Cq. D C × C H). [c] ergo B D × D A = D C × CH. item D C. CH + A E. E F [d] = (R. T + A E. E F [e] = D C. C G [f] =) D C. C H + C H. C G. quare A E. E F [b] (hoc eſt A Eq. A E × E F) :: (C H . C G [g] :: C H × D C . C G × D C [h] ::) B D × D A . C G × D C. permutandóq; B D × D A. A Eq :: (C G × D C. A E × E F [k] ::) *pgr.* D G. F A. ergo in hyperbola componendo *pgr.* D G + F A. *pgr.* F A :: D Eq. [l] (B D × D A + A Eq). A Eq.

In Ellipſi verò & circulo, permutando A Eq *pgr.* F A :: (B D × D A. *pgr.* D G [m] ::) D Eq [n] (A Eq — B D × D A). *pgr.* F A — D G & permutando D Eq. A Eq :: *pgr.* F A — D G. *pgr.* F A. quare ſi fiat ex D E parallelogrammum ſimile ipſi A F [o]; liquet propoſitum.

Coroll. Quæ de parallelogrammis oſtenſa ſunt, eadem valent in trigonis horum dimidiis.

Prop. X L I I.

Fig. 63.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat in A; & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C H); ſumpto autem quovis puncto (D) in ſectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ (D E, D F), altera quidem (D E) æquidiſtans contingenti (C A); altera verò (D F) æquidiſtans ei (C H), quæ à tactu (C) ordinatim eſt appplicata; triangulum (E D F) quod ab ipſis conſtituitur, æquale erit parallelogrammo (F G) contento linea (C H) à tactu applicata, & ea (F B), quæ interjicitur inter æquidiſtantem (D F) & ſectionis verticem (B.)

a 35. *hujus.*
b *ex.* 41. 1.

Nam ob A H [a] = 2 H B, [b] erit triang. C H A = *pgr.* H G. quare *pgr*. H G. triang. D F E[c] ::(triang. C H A. D F E[d] :: C Hq. D F q[e] :: H B. F B[f] ::) *pgr*. H G. *pgr*. F G. [g] ergo triang, D F E = *pgr*. F G. *Q. E. D.*

c 7. 5.
d 22. 6.
e 20. *hujus*.
f 1. 6. g 9. 5.

Prop. XLIII.

Fig. 64. 65. 66.

Si hperbolen, vel ellipſin, vel circuli circúmferentiam contingens recta linea (E D) conveniat cum diametro (A B); & à tactu (E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (E F); huic verò per ſectionis verticem (B) ducatur æquidiſtans (B L), quæ cum linea (E C) per tactum (E) & centrum (C) conveniat in (L); & ſumpto in ſectione aliquo puncto (G), ab eo ad diametrum ducantur duæ lineæ (G H, G K) una quidem (G H) æquidiſtans contingenti (E D), altera vero (G K) æquidiſtans ei (E F), quæ à tactu applicata eſt: triangulum (G K H) ab ipſis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum (C K M) quod abſcindit linea (C E) per centrum & tactum ducta, triangulo (C B L) ab ea (C B) quæ ex centro ſimili abſciſſo: in ellipſi verò, & circuli circumferentia una cum triangulo (C K M) abſciſſo ad centrum æquale erit triangulo (C B L), ſimili abſciſſo, quod deſcribitur ab ea (C B) quæ ex centro.

Nam G K K H[a] = (EF. F D[b] = C F. F E + R. T[c] =) C B. B L + R. T. unde triang. G H K, æquatur exceſſui triangulorum C K M, B C L. *Q. E. D.*

a 4. 6.
b 39. *hujus*.
c 4. 6.
d *cor*. 41. *hujus*.

Coroll. Triang. G K H = 4 laterum K B L M.

Schol.

Triang. C B L = triang. C D E.

Vid. Eut.

Prop. XLIV.

Fig. 67.

Si unam oppoſitarum ſectionum contingens recta linea (F G) contingens cum diametro (A B) conveniat (in G); à tactu verò (F) ad diametrum ordinatim applicetur linea (F O); atque huic per alterius ſectionis verticem (B) ducatur æquidiſtans (B L), ut conveniat cum linea (F C) per tactum (F) & centrum (C) ductâ; ſumpto autem quovis in ſectione puncto (N), applicentur ad diametrum duæ lineæ (N K, N H), quarum altera (N K) æquidiſtet contingenti (F G), altera æquidiſtet ei (F O) quæ à tactu ordinatim applicata eſt; triangulum (N H K), ab ipſis factum, minus eſt, quàm triangulum (CMH) quod abſcindit applicata ad centrum ſectionis, triangulo ſimili (CBL), abſciſſo ab ea (C B) quæ ex centro.

a 37. *hujus.* Productâ F C, ut occurrat ſectioni B in E, per E ducatur tangens
b *hyp.* E D, & ordinatim applicetur E X. Eſtque O C × C G [a] = (A C q
c *cor.* 19. *hujus.* [b] = B Cq [a] =) X C × C D. ergo cùm ſit O C [c] = X C, erit C G =
d 15. 1. C D. item F C [c] = E G. & verticales anguli ad C [d] pares ſunt: [e] er-
e 4. 1. go ang. C G F = ang. C D E. [f] unde D E ad F G, & [g] proinde ad
f 27. 1. N K parallela eſt. [h] ergo triang. C M H — C B L = triang. N H K.
g 30. 1.
h 43. *hujus.*

Coroll. C D = C G.

Coroll. Tangens E D tangenti F G æqualis & parallela eſt: & converſim; ſi E D tangenti F D æqualis vel parallela ſit, etiam E D tanget oppoſitam ſectionem.

Prop. XLV.

Fig. 68. Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens
69. recta linea (C M L) cum ſecunda diametro (H D) conveniat (in L);
70. & à tactu (C) ad eandem diametrum applicetur linea (C D), æqui-
71. diſtans alteri diametro (A H); & per tactum (C) & centrum (H) ducta linea (C H) producatur; ſumpto autem in ſectione quovis puncto (B), ad ſecundam diametrum (H D) ducantur duæ lineæ (B E, B F), quarum una (B E) contingenti (C L), altera (B F) applicatæ (C D) æquidiſtet; triangulum (B F E) quod ab ipſis conſtituitur, in hyperbola quidem majus eſt, quàm triangulum (G F H) abſciſſum ab applicata ad centrum, triangulo (L C H), cujus baſis eſt linea contingens (C L), & vertex ſectionis centrum (H): in ellipſi verò & circuli circumferentia, unà cum triangulo abſciſſo (G F H) æquale eſt triangulo (L C H), cujus baſis eſt linea contingens (C L) & vertex ſectionis centrum (H).

a 39. *hujus.* Ducantur C K, B N ad D H parallelæ. & trigonum ad A H, (ſimile
b 4. 6. trigono (C D L) appelletur P. eſtque C K. K H [a] = (M K. K C +
c *cor.* 41. *hujus.* R. T [b] =) C D. D L. + R. T. quare in hyperb. triang. C D L
d 34. 1. & 1. *ax.* (C D H + C L H) [c] = (triang. C K H + P [d] =) triang. C D H + P.
e 3. *ax.* [e] unde P = triang. C L H. Cæterum ob B N. F G [f] = (F H. F G.
f 7. 5. [g] = D H. D C [f] = C K. K H [h] = C D. D L + R. T [l] =) B F.
g 4. 6. (N H) F E + R. T. [e] Erit triang. B F E = triang. G H F + P.
h *priùs.* [m] ergo triang. B F E = triang. G H F + triang. C L H.
l 4. 6.
m 2. *ax.* 1.

Simili diſcurſu, in ellipſi erit triang. B F E + G H F = triang. C L H.

Prop.

Prop. XLVI.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat (in A); quæ per tactum (C) ducitur diametro æquidiſtans (H C M), ad eaſdem partes ſectioni lineas (L F) in ſectione ductas, quæ æquidiſtant contingenti (C A), bifariam ſecabit (in N.) Fig. 72.

Ordinatim applicentur B H, F G K, L M D. Eſtque triang. E L D [a]= *pgr.* B M. & triang. E F G [a]= *pgr.* B K. [b] ergo 4 lat. F L D G = *pgr.* G M. auferatur commune N M D G F; [b] manéntque trigona N M L, F K N æqualia. [c] eadémque ſimilia ſunt. ergo homologa latera N L, N F æquantur. *Q. E. D.*

a 42. *hujus.*
b 3. *ax.* 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. 1.

In parabola omnes lineæ parallelæ diametro ſunt* etiam diametri: & viciſſim, omnes diametri ſunt parallelæ. * *def.* 10. *hujus.*

Coroll. 2.

Omnes contingenti æquidiſtantes ſunt ordinatim applicatæ ad diametrum per tactum ductam.

Prop. XLVII.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat (in D); per tactum (E) & centrum (C) ducta linea (E C) ad eaſdem partes ſectioni, quæ in ſectione ducuntur contingenti (E D) æquidiſtantes (G N) bifariam ſecabit (in O.) Fig. 73. 74.

Ordinatim applicentur N F X, B L, G M K. Eſtque triang. HNF [a]= 4 lat. L B F X. & triang. G H K [a]= quadrilat. L B K M. [b] ergo 4 lat. N G K F = M K F X. commune auferatur O N F K M, [b] manent trigona O M G, O X N æqualia. [c] eadem vero ſimilia ſunt. ergo N O = G O. *Q. E. D.*

a *cor.* 43. *hujus.*
b 3. *ax.* 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. C E eſt diameter ſectionis cujuſlibet ex his.

Prop. XLVIII.

Si unam oppoſitarum ſectionum contingens recta linea (L K) cum diametro (A B) conveniat (in K); & per tactum (L), & centrum (C) linea (L C) producta alteram ſectionem ſecet (in E); quæ in altera Fig. 75.

ſectione ducta fuerit contingenti (L ~~X~~ K) æquidiſtans (G N) à lineâ (L C) productâ biſecabitur (in O.)

a *cor.* 47. *hujus.*
b 30. 1.
c 47. *hujus.*

Ducatur tangens E D; [a] eſtque E D ad L K parallela; [b] ac ideò ad N G. [c] ergo $ON = OG$. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 76. 77.
a 6. *ax.* 1.
b 14. 6.
c 16. 6.

Sit triangulum N L K æquale parallelogrammo L C, & ang. $KLN = DLP$: erit $KL \times LN = 2DC \times LD$.

Compleatur enim *pgr.* L R. & productâ L P, fiat $PT = LP$. & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* L R [a] $=$ *pgr.* D T. [b] unde KL. LD :: LT (2DC). LN. [c] quare $KL \times LN = 2DC \times LD$.

Item, ſi D P fuerit trapezium trigono K L N æquale, erit $KL \times LN = LD \times : CD + LP$. Nam fiat $PT = DC$; & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* DT $=$ ($2DP = 2$ triang. $KLN =$) *pgr.* L R. unde KL. LT. $(LP + DC)$ :: LD. LN. quare $KL \times LN = LD \times : DC + LP$. *Q. E. D.*

Schol. Hinc KNq. KLq :: R. G (hoc eſt ut parameter axis ad parametrum diametri D N).

Fig. 78.
a 4. & 22. 6.
b 11. *hujus.*
c *prius in* 40.
d 7. 5. (*b.*
e 1. 6.

Nam KNq. KLq [a] :: XDq. DCq: & eſt XDq [b] $= R \times BX$. [c] & $DCq = G \times BX$. [d] ergo KNq. KLq :: $(R \times BX.\ G \times BX$ [e] ::) R. G.

Schol.

Eſt. 2. 7*mi* Apollonii.

Not. Si R ſit parameter axis B X; erit $G = R + 4BX$.

Nam ſit B K ad D C parallela. ergo $CB = DL = BX$. | $BT = 2DL$.

$$G \times \left|\begin{array}{l} DL = BLq = \\ BX. \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} DXq + BTq = R \times BX + 4BXq. \\ LTq. \end{array}\right.$$

ergo $G = R + 4BX$.

Prop. XLIX.

Fig. 79.

Si parabolen contingens recta linea (D C) cum diametro (B C) conveniat in (C); & per tactum (D) ducatur linea (F N) æquidiſtans diametro (C B); à vertice verò (B) ducatur æquidiſtans (B F) ei (D X), quæ ordinatim applicata eſt; & fiat ut contingentis portio (E D) inter applicatam (B F) & tactum (D) interjecta ad æquidiſtantis portionem (D F), quæ iidem inter tactum (D) & applicatam (B F) interjicitur, ita quædam recta linea (G) ad duplam contingentis (DC;)

quæ (KL) à ſectione ducta fuerit contingenti (DC) æquidiſtans, ad lineam (FN), quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans, poterit rectangulum contentum inventâ lineâ (G), & eâ (LD), quæ inter ipſam (KL), & tactum (D) interjicitur.

DE. | DF :: G. | 2 DE
C | BX.

Ordinatim applicentur D X & K N M. Eſtque C B ^{a} = (BX^{b} = a 35. *hujus.*
F D); ^{c} unde triang E B C = E F D. additóque communi DEBMN, b 34. 1.
erit D C M N ^{d} = (*pgr.* F M ^{e} =) triang. K P M. ablatóque com- c *ex.* 20.6.
muni L P M N, erit *pgr.* L C ^{f} = triang. N L K. ^{g} unde KL × L N d 2. *ax.*
= 2 D C × L D. e 42. *hujus.*
Itaq; G × L D. K L × L N ^{h} :: (G × L D. 2 D C × L D ^{k} :: G. 2 D C f 3. *ax.*
^{l} :: E D. D F ^{m} :: K L. L N ^{n} ::) K Lq. K L × L N. ^{o} ergo G × L D g *lemma præc.*
= K. Lq. h 7. 5.
k 1. 6.
l *hyp.*
Cor. Hinc D L eſt diameter, & G rectum latus ſectionis, cujus m 4. 6.
vertex D. $\frac{\overset{4FEq}{2\,\cancel{DEq}}}{BX} = \frac{2\,DE \times DC}{BX}$ eſt rectum latus ſectionis, cujus n 1. 6.
vertex B. o 9. 5.

Prop. L.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat, pérque tactum (E) & centrum (C) linea (E C) producatur; à vertice autem (B) ordinatim applicata (B G) conveniat cum ea (E C), quæ ducitur per tactum, & centrum; fiátque ut contingentis portio (E F) inter tactum (E) & applicatam B G ad portionem (E G) lineæ (E C) ductæ per tactum & centrum; quæ itidem inter tactum (E) & applicatam (BG) interjicitur, ita quædam recta linea (E H) ad duplam contingentis (E D); quæ (L M) à ſectione ducitur contingenti (E D) æquidiſtans ad lineam (E C) per tactum, & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (E H), latitudinem habens interjectam (E M) inter ipſam (L M) & tactum (E); in hyperbola quidem excedens figurâ ſimili contentæ lineâ (E K) dupla ejus (C E), quæ eſt inter centrum & tactum, & inventâ lineâ (E H), in ellipſi verò, & circulo deficiens eâdem.

Fig. 80. 81.

EF. EG :: EH. 2 ED.

E

Ducatur L R N ad B G, & C S O ad K P parallelæ. Et ob E K a *hyp.*
^{a} = 2 E C, ^{b} erit E H = 2 E S. ergo 2 E S. 2 E D ^{c} :: (E H. 2 ED ^{d} :: b 4. 6.
F E. E G ^{b} ::) L M. M R. porro ob triang. R N C ^{e} = C D E ^{f} c 7. 5.
(C G B) + L N X (in hyperbola), ^{e} vel triang. R N C + L N X d *hyp.*
= C D E (in ellipſi & circulo) erit trapezium M E D X ^{g} = triang e 43. *hujus.*
L M R. f *ſch.* 43. *hujus.*
g 3. *ax.* 1.

Digitized by Google

h *lem. ante* 49. LMR. [h] ergo LM × MR = EM × : ED + MX. Denique quia
k 4. 6. MO. ES [k] :: (MC. CE [k] ::) MX. ED. componendóque MO +
l 1. 6. ES. ES :: MX + ED. ED. erit permutando MO + ES. MX +
m *priùs et* 7. 5. ED ([l] hoc eſt EM × : MO + ES. EM × : MX + ED [m] vel EM
n 15. 5. × : MO + ES. LM × MR) :: ES. ED [n] :: 2 ES. 2 ED [o] :: LM.
o *priùs.* MR. [l] :: LMq. LM × MR. [p] ergo EM × : MO + ES = LMq.
p 9. 5. atqui ESq [q] = (SH [r] =) OP. ergo EM × MP = LMq. *Q. E. D.*
q *priùs.*
r 34. 1.

Cor. EK eſt diameter, & EH latus rectum ſectionis, cujus vertex E.

Prop. LI.

Fig. 82. Si quamlibet oppoſitarum ſectionum contingens recta linea (CD) cum diametro (AB) conveniat; pérque tactum (C) & centrum (E) linea (CE) producatur uſque ad alteram ſectionem; à vertice vero (B) ducatur linea (BG) æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, conveniénſque cum linea (CE) per tactum & centrum ducta; & fiat ut contingentis portio (LC) inter applicatam & tactum ad portionem (CG) lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta linea (K) ad duplam contingentis (CD), quæ in altera ſectione ducitur, æquidiſtans contingenti (FM) ad lineam (FE) per tactum, & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (K) latitudinem habens lineam, quæ eſt inter ipſam, & tactum (F), excedénſq; figurâ ſimili ei, quæ lineâ (CF) inter oppoſitas ſectiones interjectâ, & inventâ (K) continetur.

a *cor. 44. hujus.* Ordinatim applicetur AXN. [a] Súntque FM, CD æquales & pa-
b *conſtr.* rallelæ: [b] itémque AN, BG parallelæ ſunt. ergo FX. FN [c] :: (LC.
c 4. 6. CG :: [d] K. 2CD [e] ::) K. 2FM; unde quæcunque à ſectione AF ad
d *hypoth.* productam EF contingenti FM ducuntur parallelæ, [f] poterunt re-
e 7. 5. ctangulum contentum ipſâ K, & interjecta inter iſtas; & punctum
f 50. *hujus.* F, excedéntque figurâ ſimili ei, quæ rectâ CF, & ipſâ K continetur.

Coroll.

a 46. *hujus.* Itaque his demonſtratis, liquet in [a] parabola unamquamque recta-
b 47. rum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidiſtantes,
c 48. diametrum eſſe; In [b] hyperbola verò & ellipſi & [c] oppoſitis ſectionibus, unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.

d 49. Et in [d] parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum,
e 50. æquidiſtantes contingentibus poſſe rectangula ipſi adjacentia: in [e] Hy-

perbola,

Digitized by Google

perbola, & [f] oppoſitis rectangula adjacentia ipſi, quæ excedunt eâdem f *51. hujus.*
figurâ, in ellipſi autem, quæ eâdem deficiunt. Poſtremò quæcunque
circa ſectiones, adhibitis principalibus diametris demonſtrata ſunt, &
aliis diametris aſſumptis eadem contingere.

Prop. LII. Probl. I.

Datâ in plano rectâ lineâ (A B) ad unum punctum (A) terminatâ, Fig. 83.
invenire in plano coni ſectionem, quæ Parabole appellatur, ita ut ejus
diameter ſit data linea (A B), vertex lineæ terminus (A); quæ verò
à ſectione ad diametrum (A B) in dato angulo applicatur, poſſit re-
ctangulum contentum lineâ, quæ eſt inter ipſam & ſectionis verticem
(A), & alterâ quâdam datâ lineâ (Z).

Datus angulus primò rectus ſit. Producatur A B ad E, ita ut A E 1. *Caſ.*
$\sqsubset \frac{1}{4}$ Z. Sitque Z. Y [a] :: Y. A E. unde Z. A E [b] :: Yq. A Eq. ergo a *13. 6.*
cum Z [c] $\sqsupset$ 4 A E, [d] erit Yq $\sqsupset$ 4 A Eq, & proinde Y [*] $\sqsupset$ 2 A E. b *cor. 20. 6.*
[e] ergo ex Y, & duabus AE conſtitui poterit triangulum. Fiat ergo EAF, c *conſtr.*
rectum ſubjecto plano, ita ut AF = AE, & E F = Y; ducantúrque d *14. 5.*
A K ad E F, & F K ad E A parallelæ ([f] unde A K [f] = E F = [g] = Y; * *4. 2.*
& F K [f] = E A [g] = F A). Tum concipiatur conus, cui vertex F, e *22. 1.*
baſis circulus ſuper diametrum A K, rectus plano A F K; erit is co- f *34. 1.*
nus rectus (ob F K = F A). Secetur conus plano ad circulum A K g *conſtr.*
parallelo, [h] facientíque proinde ſectionem M X N circulum, plano h *4. hujus.*
M F N (vel F A K) rectum; horúmque communis ſectio ſit recta
M N, [h] diameter nempe circuli M X N; communis autem ſectio ſub-
jecti plani, & circuli ſit recta X L. Quum igitur tam circulus M X N,
quàm ſubjectum planum recta ſint triangulo M F N, [k] erit iſtorum k *19. 11.*
communis ſectio X L recta trigono M F N, [l] ideóque rectis (quæ in l *3. def. 11.*
eo) M N, A B perpendicularis. Ex quibus conſtat planum per A B,
X L ductum facere in cono ſectionem, quæ parabole dicitur (juxta
conditiones in 11ª hujus præſcriptas) cujus diameter A B, lineæque
ad hanc à ſectione ordinatim ductæ ad rectos angulos applicentur, ut- m *priùs.*
pote ad X L parallelæ. Porro ob Z, Y; A E [m] (hoc eſt Z, A K, A F) n *conſtr.*
[n] $\div\div$, [o] erit Z. A F :: A Kq. A F q (A F × F K). [p] unde Z eſt rectum o *cor. 20. 6.*
latus. Ergo factum. p *11. hujus.*

Sed datus angulus non ſit rectus, ſitque ei æqualis H A E; & fiat 2. *Caſ.*
A H = $\frac{1}{2}$ Z; & per H ducatur H E ad A E perpendicularis, & per Fig. 84.
E ad H B parallela E L, & per A ad E L perpendicularis A L: tum
biſectâ E L in K, per K ducatur ipſi E L perpendicularis M K F G;

a 11.6. ſitque A Lq [a] = L K × K M. Datis igitur rectâ K L poſitione, & rectâ
K M magnitudine, & recto angulo, deſcribatur (ut modò oſtenſum)
b 11. *hujus.* parabole, cujus diameter K L, vertex K, & rectum latus K M. Tranſi-
c 33. *hujus.* bit hæc per A ([b] ob A Lq = K L × K M) & A E [c] continget ipſam,
d *cor.* 46. *huj.* (ob L K = K E) & H A eſt diameter [d] (quia ad E L parallela), [e] &
e 45. *hujus.* quæ ad A E parallelæ, biſecantur ab A B, [f] inque angulo H A E appli-
f *conſtr.* cantur: & ob trigona A G F, A E H [g] ſimilia (quia anguli A E H,
g 4. 6. A G F recti, & H A E communis), eſt F A. A G [h] :: (H A. A E [h] ::)
h 15.5. 2H A. 2A E, [k] hoc eſt F A. A G :: Z. 2A E. [l] unde Z rectum erit la-
k *conſtr.* tus ſectionis. Quæ *E. F.*
l 49. *hujus.*

Prop. LIII. *Probl.* 2.

Fig. 85. Datis duabus rectis lineis (A B, B C) terminatis, quæ ad rectos in-
* *hoc eſt* ver- ter ſe angulos conſtituantur; & alterâ (A B) productâ ad * eaſdem
ſùs D. partes angulo recto, invenire coni ſectionem, quæ hyperbole dicitur;
in eodem plano, in quo ſunt datæ lineæ (A B, B C), ita ut producta
(A B) ſit diameter ſectionis, & vertex punctum (B), quod ad angu-
lum (A B C) conſiſtit; quæ verò à ſectione ad diametrum ordinatim
applicatur, angulum faciens, æqualem dato, poſſit rectangulum, quod
adjacet alteri lineæ (B C), latitudinem habens lineam interjectam in-
ter applicatam, & ſectionis verticem (B), excedénſque figurâ ſimili, &
ſimiliter poſitâ ei, quæ datis â principio lineis (A B, B C) continetur.

1. *Caſ.* Sit datus angulus primò rectus; & ſuper lineam A B planum at-
tollatur, rectum ſubjecto plano, in quo circa A B deſcribatur circulus,
* *vid. not.* 1. * ita ut ductâ diametro E K L ad A B perpendiculari, non ſit ratio
E K ad K L major eâ, quam habet A B ad B C. Fiat igitur E K. K M
a 12.6. [a] :: A B. B C. & per M ducatur M F ad A B parallela; junctíſque
b 29. 1. A F, E F, B F, per B ducatur B X ad E F parallela. Itaque ob ang.
c 27.3. A X B [b] = (A F E [c] = E F B [b] =) F B X, [d] erit F B = F X. Con-
d 6. 1. cipiatur jam conus, cujus vertex F, baſis circulus ſuper diametrum B X,
rectus trigono F B X Erit is conus rectus (ob F B = F X). Produ-
cantur F B, F X, M F, & ſecetur conus plano, ad circulum B X paral-
e. 4. *hujus.* lelo, [e] facienti proinde circulum G P H R rectum plano F X B, cujúſq;
diameter G H communis ſit iſtorum planorum ſectio. Sit verò
P D R communis ſectio circuli G R H, & ſubjecti plani. Et quoniam
tam circulus G R H, quàm ſubjectum planum recta ſunt trigono FGH,
f 19.11. [f] erit horum communis ſectio P D R eidem trigono F G H recta;
g 3. *def.* 11. [g] ideóque rectis, quæ in eo, G H, D B perpendicularis. Ex quibus
liquet

liquet coni ſectionem P B R (juxta conditiones in 12^{ma} hujus præſti- h *conſtr.*
tutas) eſſe hyperbolen, cujus vertex B, & ordinatæ ad diametrum A B k 2. 6.
in angulo recto applicentur, quippe omnes ad ipſam P R parallelæ. l 1. 6.
Porro ob A B. B C [h] :: (E K. K M [k] :: N E. N F [l] :: N E × N F m 35. 3.
[m] (N A × N B). N Fq [n] = N A. N F [o] (O F. ~~F~~G) + N B.N F n 23. 6.
([o] OF. ~~F~~H) [n] =) O Fq. O G × G H [p] :: A B. B C. [q] erit A B tranſ- o 4. 6. O
verſum latus, & B C rectum. p 11. 5. O
q 12. *hujus.*

Sin datus angulus non ſit rectus. Datæ ſint rectæ A B, A C, & 2. *Caſ.*
angulus B A H per dato. Biſecetur A B in D, & deſcripto ſuper A D Fig. 86.
ſemicirculo, occurrat G F ad A H parallela, * faciens G Fq. D G × *vid. not. 2.
G A :: A C. 2 A D; junctaq; F D, [a] fiat F D. D L :: D L. D H; & ſum- a 13. 6.
ptâ D K = D L, [b] fiat L F. A F :: A F. F M; & connectatur K M, b 11. 6.
& per L ducatur N L X ad K F perpendicularis. Deſcribatur tunc c 12. *hujus.*
Hyperbole (juxta modò oſtenſa), cujus vertex L, tranſverſus axis K L, d *conſtr.* & 17.
rectum latus L N; [c] tranſibit hæc per A [d] (ob L F × F M = A Fq.) e 37. *hujus.* (6.
& A H ſectionem [e] continget (ob F D × D H = D Lq) [f] & proin- f *cor.* 47. *hujus.*
de A B eſt diameter ſectionis. Porro, quum ſit A C. 2 A H + F G g 4. 6.
G D [g] = (A C. 2 A H. + A H. A D [h] = A C. 2 A H + 2 A H. h 15. 5.
2 A D [k] = A C. 2 A D [l] = F Gq. G A × G D [m] =) F G. G A + k 5. *def.* 6.
F G. G D. Erit A C. 2 A H :: (F G. G A [n] ::) O A. A X. [o] unde l *conſtr.*
A C eſt rectum latus. Ergo factum. m 23. 6.
n 4. 6.
o 50. *hujus.*

Notæ.

1. Deſcribitur circulus circa A B, ita ut E K. K L :: A B. B C, Fig. 87.
hoc pacto.

Fiat utcunque Z K. K Y [a] :: A B. B C. & biſectâ Z Y in V, centro a 12. 6.
V, per Z, & Y deſcribatur circulus, ſecans ipſam A B (ſi opus eſt,
productam) in S, & T; connexiſque S Y, S Z, per A ducantur ad b 29. 1. *et* 2. *ax.*
has parallelæ A L, A E. ergo quum angulus Y S Z rectus ſit, [b] erit c *conv.* 31. 3.
quoque angulus L A E rectus. [c] ergo ſuper diametrum L E deſcrip- d *cor.* 1. 3.
tus circulus tranſibit per A, [d] ideóque per B, [e] quia K B = K A. éſtq; e *hyp.*
E K. Z K [f] :: (A K. S K [f] ::) L K. Y K. & permutando E K. L K :: f 4. 6.
(Z K, Y K [g] ::) A B. B C. g *conſtr.*

2. Quomodo autem ducatur G F ad A H parallela, faciens GFq ad Fig. 88.
D G × G A in data ratione (puta R ad S), ita conſtabit. Sumpto Z
centro circuli, ducatur Z Y ad A H T perpendicularis, & ab occurſu
Y, ducatur Y Q ad A H parallela, [a] quare Y Q tangit circulum. Fiat a *cor.* 16. 3.
verò Q V. V Y [b] :: S. $\frac{R-S}{2}$. & productâ Q Y, ſumatur Y K = Y V; b 12. 6.

Digitized by Google

connectantúrque Z K, Z V circulum ſecantes in P, & F; conjunctaq; P F protrahatur ad G. dico factum.

c 4. 1. Nam ob V Y = K Y, & angulos ad Y rectos, [c] erit Z V = Z K.
d 2. 6. e 30. 1. item Z F = Z P, [d] ergo F P ad V K, [e] hoc eſt ad A H, eſt parallela. Et
f *conſtr.* quoniam S. $\frac{R-S}{2}$ [f] :: Q V. V Y, erit duplando conſequentes, S. R—S
* :: Q V. V K. & invertendo R—S. S :: V K. Q V. & componendo R. S
g 1. 6. :: (Q K. Q V *:: G P. G F [g] :: G P × G F. G Fq [h] ::) D G × G A.
h 36. 3. & 7. 5 G Fq. ac inverſè S. R :: G F q. D G × G A. *Q. E. F.*

Prop. LIV. *Probl.* 3.

Fig. 89.

Datis duabus rectis terminatis (A B, A C), atque ad rectos inter ſe angulos, invenire circa diametrum ipſarum alteram (A B) coni ſectionem, quæ Ellipſis appellatur, in eodem plano, in quo ſunt datæ lineæ (A B, A C), ita ut vertex ſit punctum (A) ad rectum angulum (B A C); & à ſectione ad diametrum (A B) applicatæ in angulo dato poſſint rectangula adjacentia alteri lineæ (A C), quæ latitudinem habeant lineam inter ipſas, & verticem (A) ſectionis interjectam, deficiántque figurâ ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ datis rectis lineis (A B, A C) continetur.

1. *Caſ.*

Sit datus angulus primò rectus, & ex A B planum attollatur, rectum ſubjecto plano, in quo circa A B deſcriptum ſit circuli ſegmentum A D B; & biſecetur arcus A D B in D, unde connectantur DA, D B; & fiat A X = A C; & per X ducatur X O ad B D parallela, & per O ipſa O F ad A B parallela, & juncta D F occurrat protractæ B A in E. Jungantur F A, F B, & producantur, pérque punctum G (utcunque ſumptum in F A) productâ) ducatur ipſi E D parallela GH, productæ A B occurrens in K, productæque F O in L. Eſtque ideò
a 29. 1. ang. H G F [a] = (ang. E F A [b] = F A D [c] (F B D) + F D A [d] (FBA)
b 32. 1. = F B D + F B A [e] = A B D [c] = D F B [a] =) G H F [f] = H G F.
c 26. 3. [g] unde F G = F H. Itaque ſuper G H deſcribatur circulus G H N
d 21. 3. rectus trigono H F G, ſitque baſis coni recti, habentis verticem F. Et
e 19. *ax.* 1. quia tam circulus G H N, quàm ſubjectum planum recta ſunt plano
f 1. *ax.* g 6. 1. H FG, [h] erit ipſorum communis ſectio (K M) plano eidem, [k] rectiſque
h 19. 11. idcirco G K, A K perpendicularis.

k 3. *def.* 11. Liquet igitur planum per A K M [l] facere in cono ellipſin, cui dia-
l 13. *hujus.* meter A B, ad quam ordinatæ omnes perpendiculariter applicentur,
m 23. 6. quippe ipſi K M parallelæ: porro, ob F Lq. G L × L H [m] = (F L.
G L

GL[n] (AK KG, [n] vel AE. EF) + FL. LH ([n] BK. KH, [n] vel BE. EF) = AE. EF + BE. EF[m] = AE × BE. EFq [o] = DE × EF. EFq [p] = DE. EFq = DA. AO :: [q] BA. AX [r] ::) BA. AC [s] :: FLq. GL × LH. erit AC rectum latus.

n 4. 6.
o 36. 3. & 7. 5.
p 1. 6. q 4. 6.
r conſtr. et 7. 5.
s 11. 5.

Sin diameter AB minor ponatur dato recto latere AC; biſectâ AB in D, ducatur FE biſecta quoque in D, ita ut ſit AC. FE [a] :: FE. AB. & ductâ FG ad AB parallela, ſit FE. FG [b] :: AC. AB ([c] hoc eſt) :: FEq AEq :: FDq. [d] (FD × DE). ADq [e] :: FE. FG. Ducatur itaque (ut modò oſtenſum) ellipſis, cujus axis EF (& rectum latus FG; tranſibit hæc per A, (ob FD × DE ADq [f] :: FE FG) [g] ideóque per B ([d] ob AD = DB). item propter AC. [illegible]B :: FDq. AD × DB (ADq). [f] erit AC rectum latus.

2. *Caſ.*
Fig. 90.
a 13. 6.
b 12. 6.
c *cor.* 20. 6.
d *conſtr.*
e 11. 5.
f 21. *hujus.* A
g 30. *hujus.*

Sed datus angulus non ſit rectus; ſitque ei æqualis angulus BAD; biſectâque AB in E, circa AE deſcribatur ſemicirculus, in quo ad AD *ducatur parallela FG, faciens FGq AG × GE :: CA. AB; & junctæ AF, EF producantur; [a] & ſit DE. EH :: EH. EF & ſumptâ EK = EH, factóque HF. FA [b] :: FA. FL, conjungatur KL, occurrens ductæ NM (per H ad AL) parallelæ. Tum (ex modò præoſtenſis) deſcribatur ellipſis, cujus axis tranſverſus ſit KH, & rectum latus HM. [c] tranſibit hæc utique per A [d] (ob HF × FL = FAq); & [e] idcirco per B (ob AE [c] = EB) ac ipſam [f] continget DA [g] (ob DE × EF = EHq). Item propter CA. 2DA. + FG. GE [h] = (CA 2DA + DA. AE [k] = CA. 2DA + 2DA. AB [l] = CA. AB [m] = FGq. AG × GE [n] =) FG. AG + FG. GE. erit CA. 2DA*:: (FG. AG [p] ::) XA AN. [q] ergo AC eſt rectum latus.

3. *Caſ.*
Fig. 91.
* *vid. Not.*
a 13. 6. b 11. 6.
c 13. *hujus.*
d *conſtr.*
e 30. *hujus.*
f *conv.* 38 *huj.*
g *conſtr.* & 17. (6.
h 4. 6.
k 15. 5.
l 5. *def.* 6.
m *conſtr.*
n 23. 6.
*
p 4. 6.
q 50. *hujus.*

Notæ.

Quomodo verò duci poterit GF ad AD parallela, ita ut ſit GFq ad AG × GE in data ratione S ad R, ita conſtabit.

Fig. 92.

Sumpto Z centro circuli, ducatur ad AD perpendicularis ZY, circulo occurrens in Y. & per Y ducatur QY ad AD parallela; [a] & proinde tangens circulum in Y, occurrenſque productæ ZA in Q.

a *cor.* 16. 3.

[b] Fiat autem $\frac{R-S}{2}$. S :: YQ. QV. productâque VY ſumatur YK = YV; & junctæ [illegible]Z, KZ producantur, adeò ut completo circulo occurrant punctis F, P, & connectatur FP, ſecans AE in G. Dico factum.

b 12. 6.
V

Nam

Digitized by Google

c *conſtr.* & 4. 1. Nam ob Z V [c] = Z K, & Z P = Z F, [d] erit P F ad V K, [e] hoc eſt
d 2. 6.
e 30. 1. ad A D parallela. [f] item (ob $\frac{R-S.}{2}$ S [f] :: Y Q. Q V,) erit componendo
f *conſt.*
$\frac{R+S}{2}$. S. :: Y V, Q V. & duplando antecedentes, R + S. S :: K V.
g * Q V. & dividendo R. S :: (K Q. Q V [g] :: P G. G F [h] :: P G × G F.
h 1. 6. G Fq [k] ::) A G × G E. G Fq. & inversè S. R :: G Fq. A G × G E.
k 35. 3. & 7. 5. *Q. E. F.*

Prop. LV. Probl. 4.

Fig. 93. Datis duabus rectis terminatis (E B, B H), atque ad rectos inter ſe angulos, invenire oppoſitas ſectiones, quarum diameter ſit una (E B) datarum linearum; & vertices lineæ termini (E, B); applicatæ verò ab utraque ſectione poſſint ſpatia adjacentia alteri lineæ (B H), excedentiáque figurâ ſimili ei, quæ datis lineis (E B, B H) continentur.

a 53. *hujus.* [a] Deſcribatur hyperbole A B C, cujus diameter tranſverſa ſit B E, & rectum latus B H; & ordinatæ ad B E in dato angulo (G) applicentur. Ducatur quoque E K ad rectos ipſi B E, æqualiſque ipſi B H, & [a] deſcribatur itidem alia hyperbole D E F, cujus diameter ſit E B, rectum latus E K; ductæque ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps ipſi G. Liquet igitur deſcriptas hyperbolas A B C, D E F fore ſectiones oppoſitas, habentes diametrum communem B E, & recta latera B H, E K inter ſe æqualia. *Q. E. F.*

Prop. LVI. Probl. 5.

Fig. 94. Datis duabus rectis lineis (A C, D E) ſeſe bifariam ſecantibus (in B), circa utramque ipſarum oppoſitas ſectiones deſcribere, ita ut rectæ lineæ (A C, D E) ſint conjugatæ diametri; & quarumlibet oppoſitarum ſectionum diameter poſſit figuram aliarum oppoſitarum.

a 11. 6 et 17. 6. Sit A C × C L [a] = D Eq; (vel A C, D E, C L $\div\!\!\div$) [b] deſcriban-
b 55. *hujus.* túrque ſectiones oppoſitæ F A G, H C K, quarum tranſverſa diame-
ter ſit A C, rectum latus C L; & ordinatim ductæ ad C A in dato
angulo applicentur. [c] Erit harum ſecunda diameter ipſa D E; quiâ A C.
c *def. ad* 16. *hujus.* D E [d] :: D E. C L; [d] & D E ordinatim applicatis parallela biſecatur
d *conſtr.* in B. [a] Sit pariter D E × D R = A Cq. & [b] deſcribantur ſectiones
oppoſitæ M D N, O E X, quarum tranſverſa diameter D E, & D R
rectum latus; ductæque ordinatim ad D E in dato angulo applicen-
centur; [c] eritque harum ſecunda diameter A C, ob D E. A C [d] ::
A C. D R, & A C biſectam in B. Ergo factum.

Definitio. Vocentur autem hujuſmodi ſectiones *Conjugatæ*.

APOL-

Digitized by Google

APOLLONII

CONICORUM

LIB. II.

Prop. I.

SI hyperbolen contingat recta linea (D E) ad verticem (B); & ab ipſo ex utraque parte ſumatur (B D, B E) æqualis ei, quæ poteſt quartam figuræ partem, lineæ (C D, C E) quæ è ſectionis centrò (C) ad ſumptos contingentis terminos (D, E) ducuntur, cum ſectione non convenient. Fig. 95.

Sumpto utcunque in C D puncto H, ordinatim applicetur H G F. a 21.1. *hujus.*
Eſtque A F × F B. F Gq [a] :: (T. R [b] :: Tq. T R [c] :: $\frac{Tq}{4}$. $\frac{TR}{4}$ [d] :: b 1. 6. c 15. 5. d *hyp.*
C Bq. B Dq [e] ::) C Fq. F Hq. ergo cùm A F × F B. [f] $\sqsupset$ C Fq. [g] erit e 4.6. *et* 22.6.
F Gq $\sqsupset$ F Hq. ergo punctum H eſt extra ſectionem. Idémque de f 6. 2.
reliquis rectæ C D punctis oſtendetur. ergo tota C H eſt extra ſectionem. g 14. 5.
Q. E. D.

Coroll. C Bq. B Dq :: T. R :: A F × F B. F Gq.

Prop. II.

Iiſdem manentibus, oſtendendum eſt, non eſſe alteram aſymptoton C K, quæ angulum D C E dividat. Fig. 96.

Per B ducatur BK ad C D parallela, occurrens ipſi C K in K; & a 34. 1.
per K ducatur H G K F L ad D E parallela. Eſtque H K [a] = D B; b 5. *ax.* 1.
[b] & K L $\sqsubset$ B E. [c] unde H K × K L $\sqsubset$ D B × B E vel B Dq. atqui ob c *ſch.* 48. 1.
C Bq. B Dq ([d] A F × F B. G Fq) [e] :: (C Fq. F Hq [f];:) C Fq — A F d *cor.* 1. *hujus.*
× F B. e 4.6. *et cor.* 22. (6.
f 19.5.

Digitized by Google

g 6 1. & 5. 2. ax. × F B. F Hq—G Fq [g] (hoc eſt C Bq . H G × G L .), [h] eſt B Dq =
h 9 5. (1. H G × G L. ergo H K × K L ⊏ H G × G L. [k] unde punctum K eſt
k ſch. 5. 2. intra ſectionem. & proinde C K ſectionem intrat. *Q. E. D.*

Coroll. H G × G L = D Bq = $\frac{1}{4}$ T R.

Prop. III

Fig. 97. Si hyperbolen contingat recta linea (H K), cum utraque aſymptoton (E F, E G) conveniet; & ad tactum (B) bifariam ſecabitur; quadratum vero utriuſque ejus portionis (BF, BG) æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum (B D) per tactum ducitur.

Ducatur diameter B E D, & quartæ parti figuræ ad hanc æquentur
a 1. *hujus.* ſingula B Hq, B Kq. erunt ductæ E H, E K aſymptoti. [a] ergo hæ non differunt ab ipſis E F, E G.

Prop. IV. Probl. 1.

Fig. 98. Datis duabus rectis lineis (A B, AC) angulum (BAC) continentibus, & dato intra angulum (BAC) puncto (D), deſcribere per punctum (D) coni ſectionem (quæ hyperbole dicitur, ita ut datæ lineæ (A B, AC) ipſius aſymptoti ſint.

a 31. 1. b 4. 6. [a] Duc D F ad A B parallelam, & fac F C = F A, & produc CDB.
c *conſtr.* Eſtque B C. C D [b] :: (C A. C F [c] :: 2. 1). ergo B Cq [d] = 4C Dq
d *cor.* 4. 2. = 4B Dq. duc D A E, ita ut A E = D A. & fiat E D × G [e] =
e 11. 6 *et* 17. 6. B Cq [f] = 4B Dq. [g] Habes igitur diametrum E D, & rectum latus G
f *prius.* hyperbolæ, cujus vertex D, [h] aſymptoti A B, A C. ergo factum.
g 53. 1. *hujus.*
h 1. *hujus.*

Prop. V.

Fig. 99. Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter (D B E) lineam quandam (A C) bifariam ſecet (in E), quæ (F G) ad diametri terminum (B) contingit ſectionem, æquidiſtans eſt lineæ (A C) bifariam ſectæ.

a 46 & 47. 1. Si negas A C eſſe parallelam ipſi F G, ſit ei parallela C H. [a] ergo
hujus. C K = K H. unde cùm ſit quoque C E [b] = E A, [c] erunt A H, E K
b *hyp.* parallelæ, contra 22. 1. hujus.
c 2. 6.

Prop.

Prop. VI.

Si ellipſis, vel circuli circumferentiæ diameter (A B) lineam quan- Fig. 100.
dam (C D) non per centrum tranſeuntem biſariam ſecet (in E), quæ
ad diametri terminum (A) contingit ſectionem, æquidiſtans erit bi-
ſectæ lineæ (C D).

Demonſtratur, ut præcedens.

Prop. VII.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingat recta linea Fig. 101.
(F G); & huic æquidiſtans (A C) ducatur in ſectione; & biſari-
am dividatur (in E); quæ à tactu (B) ad punctum (E) lineam biſari-
am dividens jungitur (B E), ſectionis diameter erit.

Nam altera [a] nulla B H biſecabit A C; ergo non erit alia [b] diame- a 9. *ax.* 1.
ter quàm B E. b 46. & 47. 1. *hujus.*

Prop. VIII.

Si hyperbolæ occurrat recta linea (A C) in duobus punctis (A, C); Fig. 102.
producta ex utraque parte conveniet cum aſymptotis (D E, D F); &
lineæ (A E, C F), quæ ex ipſa abſciſſæ inter ſectionem & aſymp-
totos interjiciuntur, æquales erunt.

Biſecetur A C in G, ducatúrque D G. [a] hæc diameter eſt. [b] ergo a 7. *hujus.*
tangens per B (nempe H K) eſt ad A C parallela; ergo cùm H K b 5. *hujus.*
aſymptotis occurrat, [c] ſitque B H = B K, etiam A C eiſdem occur- c 3. *hujus.* *
ret, [d] eritque G E = G F; [e] unde manent A E, C F æquales. *Q. E. D.* d 4. 6.
e 3. *ax.*

Prop. IX.

Si recta linea (C D) occurrens aſymptotis (A C, A D) ab hyper- Fig. 103.
bolæ biſariam ſecetur, (in B) in uno tantum puncto ſectionem con-
tingit.

Occurrat alibi, ſi fieri poteſt, in E. ergo E C [a]= (B D [b]= $\frac{1}{2}$ D C a 8. *hujus.*
[b]=) B C. [c] *Q. E. A.* b *hyp.*
c 9. *ax.* 1.

Prop. X.

Si recta linea (D F) ſectionem ſecans (in A, C) conveniat cum u- Fig. 104.
traque aſymptoton (E D, E F), rectangulum contentum rectis lineis

(D A, A F) quæ inter aſymptotos, & ſectionem interjiciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum (H G), quam æquidiſtantes ipſi ductæ lineæ (A C) bifariam dividit.

Patet ex corollario 2dæ hujus.

a 1. ax. 1. *Cor.* A D × A F [a] = C D × C F.

Prop. XI.

Fig. 105. Si utramque linearum (A E, A C) continentium angulum (EAC), qui deinceps eſt angulo (D A C) hyperbolen continenti, ſecet recta linea (E F), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet; & rectangulum conſtans ex iis (E G, F G), quæ interjiciuntur inter lineas AE, A C) angulum continentes, & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro (A B), quæ ſecanti lineæ (E F) æquidiſtans ducitur.

a cor. 47 1. hujus. Ducatur A L ad E F parallela. [a] hæc diameter eſt ſectionis. [b] er-
b 26. 1. hujus. go E F in unico puncto (G) occurrit ſectioni. Per G ordinatim ap-
c 5. hujus. plicetur H G L K; [c] hæc tangenti C D (per verticem B ductæ) eſt
d 3. hujus. parallela. C Bq [d] (C B × B D). B Aq [e] = (C B. B A [f] (H G.
e 23. 6. G F) + B D. B A [f] (G K. G E) [e] =) H G × G K. G F × G E. ergo
f 4. 6. cùm C Bq [g] = H G × K G, [h] erit B Aq = E G × G F. *Q. E. D.*
g 10. hujus.
h 14. 5.

Prop. XII.

Fig. 106. Si ab aliquo puncto (D) eorum, quæ ſunt in ſectione, ad aſymptotos (B A, B C) duæ rectæ lineæ (D E, D F) in quibuſlibet angulis ducantur; & ab altero puncto (G) in ſectione ſumpto ducantur aliæ lineæ (G H, G K) his ipſis (D E, D F) æquidiſtantes, rectangulum conſtans ex æquidiſtantibus (G H, G K) æquale eſt ei, quod fit ex iis (D E, D F), quibus illæ æquidiſtantes ductæ fuerant.

a cor. 10. hujus. Connexa G D protrahatur utrinque in A, & C. Eſtque D A × D C
b 14. 6. [a] = G A × G C: [b] unde G A. D A [c] (G H. D E) [b] :: (D C. G C
c 4. 6. [c] ::) D F. G K [d] :: G H. D E. [e] ergo G H × G K = D F × D E.
d 11. 5. *Q. E. D.*
e 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 107. Si in loco aſymptotis (A B, A C) & ſectione terminato, quædam recta linea (E F) ducatur, æquidiſtans aſymptoton alteri (A B), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet.

Si primò negas E F ſectioni occurrere, per G (punctum utcunque a 12.6.et16.6.
ſumptum in ſectione) ducantur G C, G H ad A B, A C parallelæ. b 2. *hujus.*
Sitque A E × E F [a] = G C × G H; connexa A F [b] ſectioni occurret, c 12. *hujus.*
puta in K. Ex quo ducantur K L, K D ipſis A B, A C itidem parallelæ. d *conſtr.*
ergo K L × (A L) K D [c] = (G H × G C [d] =) A E × E F. [e] *Q.E.A.* e 9. *ax.* f 12. *hujus.*
Proinde E F ſectioni occurret, nempe in M. Dic alibi occurrere, g 34. 1. & *ſch.*
puta iu N. ducantúrque M X, N B ad A C parallelæ. ergo E M × h 9. *ax.* (48. 1.
M X [f] = (E N × N B [g] =) E N × M X. [h] *Q. E. A.*

Prop. XIV.

Aſymptoti (A B, A C), & ſectio in infinitum productæ ad ſeipſas Fig. 108.
propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo (K).

Ducantur E H F, C G D tangenti utcunque parallelæ; pérque A, a 10. *hujus.* &
& occurſum H jungatur A H X. Eſtque C G × G D [a] = E H × H F. 1. *ax.* b 14. 6.
[b] quare G D. H F :: E H. C G. ergo cùm G D ⊏ (X D ⊏) H F, c 14. 5.
[c] erit E H ⊏ C G; paritérque omnes decreſcunt versùs partes C G. d 13. *hujus.*
Sumatur E L ⊐ K, ducatúrque L N ad A C parallelæ; [d] hæc ſectio- e 34. 1.
ni occurret, puta in N, per quod ducatur M N B ad E F parallela. f *conſtr.*
Eſtque M N [e] (= E L) [f] ⊐ K, *Q. E. D,*

Cor.

Ex hoc manifeſtum eſt lineas A B, A C ad ſectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ aſymptoti (quales A Y, A Z); & angulum B A C minorem eſſe quolibet angulo, qui aliis ejuſmodi lineis continetur.

Prop. XV.

Oppoſitarum ſectionum (A, B) aſymptoti communes ſunt. Fig. 109.

Sint A B diameter, C centrum, ac D E, F G contingant ſectiones
in A, B; è quibus utrinque abſcindantur A D, A E, B F, B G, ut ſin- a 14. 1. *hujus.*
gularum quadrata æquentur quartæ parti [a] figuræ ad A B: itaque jun- b 1. *hujus.*
ctæ C D, C E ſectionis A, & C F, C G, ſectionis B [b] aſymptoti e- c 30. 1.
runt. quoniam verò utraque D E, F G ordinatim applicatis ad A B d 29. 1.
eſt parallela; & [c] proinde ſibi invicem iſtæ parallelæ ſunt, [d] erit ang. e *hyp.*
B A D = G B C; paréſque [e] ſunt A C, B C; [f] & A D, B G. [g] ergo f *conſtr.*
ang. A C D = ang. B C G. [h] ergo D C G eſt recta linea. Simili- g 4. 1. h *cor.* 15. 1.

terque

Digitized by Google

terque E C F recta eſt. Unde patet propoſitum.

Coroll. Tangentes D E, F G parallelæ ſunt ſibi invicem.

Prop. XVI.

Fig. 110. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B), ducatur quædam recta linea (H K), ſecans utramque linearum (C D, C F) continentium angulum (D C F), qui deinceps eſt angulo (D C E, vel G C F) ſectiones continenti; cum utraque oppoſitarum in uno tantùm puncto conveniet, & lineæ (H L, K M), quæ ex ipſa abſciſſæ inter aſymptotos (C D, C F), & ſectiones interjiciuntur, æquales erunt.

a 11. *hujus.* Quod H K ſectionibus occurrat, [a] manifeſtum eſt; occurrat pun-
ctis L, M; pérque centrum C ducatur A B ad L M parallela. Eſtque
b 19.1. *hujus.* K L × L H [a] = (A Cq [b] = B Cq [a] =) H M × M K. [c] ergo K L.
c 16. 6. M K :: H M . L H . & componendo L M . M K :: M L . L H. [d] unde
d 9. 5. M K = L H, *Q. E. D.*

Prop. XVII.

Fig. 111. Oppoſitarum ſectionum (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, aſymptoti communes ſunt.

Sint A B, C D conjugatæ diametri ſectionum; pérque vertices A,
a *cor.* 15. *hujus.* B, C, D ducantur tangentes F G, K H, F K, G H; [a] Liquet, F G H K
b *def. ad* 16. & 17. 6. eſſe parallelogrammum, & diagonales F H, G K eſſe aſymptotos; nam
c *cor.* 4. 2. figuris ad A B [b] æquatur C Dq, [c] hujúſque quartæ parti ſingula A Fq,
d 1. & 16. *hujus.* A Gq, B Hq, B Kq æquantur. [d] unde F H, G H ſunt aſymptoti ſe-
ctionum A, B. pariterque hæ aſymptoti ſunt ſectionum C, D. quare
conſtat propoſitum.

Prop. XVIII.

Fig. 112. Si uni (C) oppoſitarum ſectionum, (A, B; C, D) quæ conjugatæ dicuntur, occurrat recta linea (E F), & producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat; cum utraque (A, B) ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantùm puncto conveniet.

a 13. *hujus.* Sint G H, L K aſymptoti, [a] his occurrit E F. [b] ergo liquet pro-
b 16 *hujus.* poſitum.

Prop.

Prop. XIX.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 113.
ducatur recta linea (E F), ipſarum quamvis (C) contingeus cum ſectionibus * *per præced.*
(A, B), quæ deinceps ſunt, * conveniet (in G, H); & ad tactum
(C) bifariam ſecabitur.

Sint K L. M N aſymptoti. Et ob C E [a] = C F, & E G [b] = F H, a 3. *hujus.* b 16. *hujus.*
[c] erit C G = C H. *Q. E. D.* c 3. *ax.* 1.

Prop. XX.

Si oppoſitarum ſectionum (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 114.
unam (A) contingat recta linea (E F); & per ipſarum centrum (X)
ducantur duæ lineæ; una quidem (E X) per tactum, altera verò (X G)
contingenti (E F) æquidiſtans; quouſque occurrat (in G) uni (C)
earum ſectionum, quæ deinceps ſunt; recta linea (G H) quæ in occurſu
(G) ſectionem contingit, æquidiſtans erit lineæ (E X) per tactum,
& centrum ductæ; quæ verò (E Z, G O) per tactus, & centrum
ducentur, oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri erunt.

Sint A M, C N [a] recta ſectionum latera, & per puncta E, G, C ordinatim a 14.1. *hujus.*
applicentur E K, G L, C R P. Eſtque X K. K E. + F K. KE b 23. 6.
[b] = (X K × F K. K Eq [c] = B A. A M [d] :: N C. C D :: [c] G Lq. L X × c 37. 1. *hujus.* d *vid. Not.*
L H [b] =) G L. L X + G L. L H. atqui (ob L X ad E K, & L G ad e 4. 6.
X K, & G X ad E F parallelas) [e] eſt F K. K E :: G L. L X. ergo manet f 6. 6.
X K. K E :: G L. L H. [f] ergo trigona E K X, H L G ſimilia ſunt. g 29. 1.
[f] & ang. E X K = H G L. itemque totus ang. G X K [g] = X G L. [h] ergo h 3. *ax* 1.
manet ang. E X G = H G X. [k] quare rectæ E X, G H parallelæ k 27. 1.
ſunt.

Porro, fiat P G. G R [l] :: H G. S. [m] eſt ergo 2 S, juxta quam poſſunt l 12. 6.
ordinatæ ad diametrum G O. item T X × K E (× X Y) [n] = C Xq; m 51.1. *hujus.*
([o] vel T X, C X, K E ÷÷) [p] quare T X. K E ([c] hoc eſt T F. F E, q vel n 38. 1 *hujus.* o 17. 6.
triang. T X F. F X E) :: (T Xq. C Xq. [p] ::) triang. T X F. X C P. p *cor.* 20. 6.
ergo triang. F X E [r] = (X C P [s] =) H X G. item ang. X E F [g] = q 1. 6.
X G H. ergo reciprocè G H. E X [t] :: E F. G X. [u] unde G H × G X r 9. 5.
= E X × E F. ergo S × G X. E X × E F [x] :: (S. × G X. G H × G X s *ſch.* 43. *huj.*
[y] :: S. G H [z] :: G R. G P [a] :: E X. E F [y] ::) E Xq. E X × E F. ergo E Xq t 15. 6. u 16. 6.

x 7. 5. y 2. 6. z *conſtr. et inverſè:* a 4. 6.

[b] =

b 5.5.
c *priùs.*
d *cor.* 4. 2.
e 6. *ax.* 1.
f *def. ad* 16. 1. *hujus.*

$^{b} = (S \times GX^{c} =) \frac{1}{4}$ fig. ad G O. quare E Zq^{d} (4E Xq)^{e} = fig. ad G O. Simili diſcurſu erit G Oq figuræ ad E Z æquale. quare E Z, G O^{f} ſunt conjugatæ diametri. *Q. E. D.*

Not. Quòd B A. A M :: N C. C D, ſic patet. Quoniam^{f} NC. B A :: BA.CD. & BA.CD :: C D. A M. erit ex æquali N C. C D :: (B A. A M.

Cor. B A. A M :: N C. C D.

Prop. XXI.

Fig. 115.

Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt, punctum (E), in quo contingentes lineæ (A E, C E) conveniunt, ad unam aſymptoton eſſe.

a 34. 1.
b 3. *hujus.*
c *hyp.*
d 1. *hujus.*

Nam quia C Xq (^{a} vel A Eq) ^{b}æquatur $\frac{1}{4}$ C Dq, ^{c} hoc eſt quartæ parti figuræ ad A B, ^{d} erit X E aſymptotos.

Prop. XXII.

Fig. 116.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quæ Conjugatæ appellantur, ex centro (X) ad quamvis ſectionem (C) ducatur recta linea (XC) & huic æquidiſtans ducatur altera (E K L H) quæ cum una (A) ex ſectionibus, quæ deinceps ſunt, & cum aſymptotis (X E, X F) conveniat; rectangulum conſtans ex portionibus (E K, K H) lineæ ductæ inter ſectionem, & aſymptotos interjectis, quadrato lineæ (X C) quæ ex centro ducitur, æquale erit.

a 5. *hujus.*
b 48. 1. *hujus.*
c 20. *hujus.*
d 10. *hujus.*
e *cor.* 4. 2.

Biſecetur K L in M, ducatúrque (per M, & X) recta M A X B; Igitur tangenti ad A^{a} parallela eſt E H; eadémque proinde ad A B diametrum ^{b} ordinatim applicatur; & A B, C D ^{c} ſunt conjugatæ diametri; quare $EK \times KH\,^{d} = (\frac{1}{4}\, TR\,^{e} =)\ CXq$.

Cor. $EK \times KH = CXq$.

Prop. XXIII.

Fig. 117.

Si in oppoſitis ſectionibus A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ex centro (X) ducatur quædam recta linea (X C) ad quamvis ſectionem (C); & huic æquidiſtans (K L) ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus (C, A, D) conveniat, rectangulum conſtans ex portionibus (K M, M L) lineæ ductæ (K L) inter tres ſectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus lineæ (X C), quæ ex centro ducitur.

a *cor.* 22. *huj.*
b 11. *hujus.*
c 1. *ax.* 1.

Sint E F, G H ſectionum aſymptoti. ergo $HM \times ME\ ^{a}= (CXq\ ^{b}=)\ HK \times KE$. ^{c}quare $2\,CXq = (HM \times ME + HK \times KE. =)$

LM,

$LM \times MK$. (Nam $LM \times MK$[d] $= LH \times MK$ [e]$(KE \times MK) +$ d 1.6.
$HM \times MK$[d]$= KE \times MK + HM \times ME + KE \times HM$[e]$= KE \times$ e 16. *hujus.*
$HK + HM \times ME$.)

Prop. XXIV.

Si parabolæ occurrant duæ rectæ (A B, D C), utraque in duobus Fig. 118.
punctis, & nullius ipſarum occurſus, alterius occurſibus contineatur,
convenient inter ſe extra ſectionem.

Per B, C puncta ductæ ſint diametri E F, G H. [a] Hæ parallelæ ſunt, a *cor.* 46. 1. *huj.*
[b] nec alibi occurrunt ſectioni. unde junctâ B C, erunt anguli A B C, b 26. 1. *hujus.*
D C B ſimul duobus rectis majores. [c] ergo A B, D C extra ſectionem c 13. *ax.* 1.
concurrent ad partes E G.

Prop. XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ (E F, G H), utraque in Fig. 119.
duobus punctis, nullius autem ipſarum occurſus alterius occurſibus
contineatur, convenient quidem inter ſeſe extra ſectionem, ſed tamen intra angulum (B A C) qui hyperbolen continet.

Ducantur A F, A H, & connectatur F H. & quoniam E F, G H *vid cor.* 31. 1.
ſecant angulos A F H, A H F, concurrent intra angulum F A H, & *hujus.*
propterea magis intra angulum B A C. Idem diſcurſus valet, ſi utraq;
E F, G H ſectionem contingunt; aut ſi una contingat, altera duobus
punctis ſecet.

Prop. XXVI.

Si in ellipſi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ (C D, E F) Fig. 120.
non tranſeuntes per centrum (H), ſe invicem ſecent (in G), bifariam
ſeſe non ſecabunt.

Per G ducatur diameter A B; ſúntque omnes, quas A B biſecat,
tangenti ad A [a] parallelæ, & proinde ſibi invicem parallelæ. Ergo C D, a 6. *hujus.*
E F non biſecantur in G. *Q. E. D.*

Prop. XXVII.

Si ellipſim, vel circuli circumferentiam contingant duæ rectæ lineæ Fig. 121.
(C D, E F; & ſiquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per 122.

centrum tranſeat ſectionis, contingentes lineæ (C D, E F) ſibi ipſis æquidiſtabunt; ſin minùs, convenient inter ſeſe ad eaſdem partes centri.

a *6. hujus.*
b 30. 1.
c *ex priore parte hujus.*
d 29. 1.
e 13. *ax.* 1.

Si A B per centrum tranſit, [a] erit utraque C D, E F ordinatim applicatis parallela, [b] ergo ſibi invicem. Sin A B non tranſeat, per centrum, ducatur diameter A H, & per H tangat K L. [c] ergo C D, K L parallelæ ſunt: [d] quare anguli B A H, K H A duobus rectis minores ſunt. [e] ergo E F, H K convenient ad partes B H: & proinde E F, A C convenient ad partes A B. *Q. E. D.*

Converſè; ſi C D, K H æquidiſtent, tranſibit recta quæ tactus connectit per centrum.

Prop. XXVIII.

Fig. 123. Si in coni ſectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidiſtantes (A B, C D) bifariam ſecet recta linea (F E) diameter erit ſectionis.

Sola enim F E biſecat parallelas ad A B.

a 5. & *6. huj.*
b 46. *et* 47. 1. *hujus.*

Si fieri poteſt, ſit alia F G diameter. [a] ergo quæ tangit ſectionem in G, eſt ubique A B, C D parallela. unde C H [b] = ($\frac{1}{2}$ C D =) C E. *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Fig. 124. 125. Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A). in idem punctum (A) conveniant; & ab eo, ad punctum (D), quod lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam ſecat. ducatur alia linea (A D), ſectionis erit diameter.

a 5. *hujus.* & 47. 1. *huj.*
b *hypoth.*
c *
d 1. *ax.*
e 9. *ax.*

Si fieri poteſt, ſit alia D E diameter; jungatúrque C E, * ſectioni occurrens in F, per quod ducatur F H K G ad C B parallela. ergo F H [a] = H K. item (ob C D [b] = D B) [c] eſt F H = H G. [d] ergo H K = H G.* *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 126. Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in unum punctum (A) conveniant, diameter (A D), quæ ab eo puncto ducitur lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam ſecabit.

a 29. *hujus.*
b *cor.* 46. 1. *huj.*

Si fieri poteſt ſit B E = E C; ducatúrque A E. [a] ergo A E eſt quoque diameter ſectionis. [b] ergo in parabola A E, A D ſunt parallelæ;

læ; in reliquis ſectionibus A [c] eſt centrum. Quæ ſunt abſurda. c *vid.* 47. 1. *hujus.*

Prop. XXXI.

Si utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F), ſiquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum tranſeat, contingentes lineæ (C D, E F), æquidiſtantes erunt; ſin minus, convenient inter ſeſe ad eaſdem partes centri. Fig. 127. 128.

Probatur, ut 27ma hujus.

Prop. XXXII.

Si utrique oppoſitarum ſectionum occurrant rectæ lineæ (A B, C D), ipſas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus ſecantes, & productæ inter ſe conveniant; punctum in quo conveniunt, erit in angulo (K L G), qui deinceps eſt angulo (G L H, vel F L K) ſectiones continenti. Fig. 129.

Sint F G, H K ſectionum aſymptoti; hiſce [a] occurret utraque A B, C D. productæ igitur occurrent ſibi invicem ſub angulo H L F, vel G L K, prout inclinantur ad has, aut illas partes. a 8. *hujus.*

Prop. XXXIII.

Si oppoſitarum ſectionum (A, B) uni (A) occurrens recta linea (C D) ex utrâque parte extra ſectionem cadat; cum altera ſectione (B) non conveniet; ſed tranſibit per tres locos, quorum unus quidem eſt ſub angulo ſectionem continente, duo verò ſub iis angulis, qui deinceps ſunt. Fig. 130.

Liquet C D [a] occurrere aſymptotis duobus punctis; ergo non alibi; ergo non alteri ſectioni, quam ſemper complectuntur aſymptoti. a 8. *hujus.*

Prop. XXXIV.

Si oppoſitarum ſectionum unam (A) contingat recta linea (CD); & huic ducatur æquidiſtans (E F) in altera ſectione (B); quæ à tactu (A) ad (G) medium lineæ æquidiſtantis (E F) ducitur (A G), oppoſitarum ſectionum diameter erit. Fig. 131.

Si fieri poteſt, ſit altera A K diameter. [a] ergo tangens per occurſum H parallela eſt ad C D, ideóque ad E F. [b] quare E K [b] = (K F = $\frac{1}{2}$ EF [c] =) E G. [d] *Q. E. A.*

a 5 *hujus.*
b 47. 1. *hujus.*
c *hyp.*
d 9. *ax.* 1.

Digitized by Google

Prop. XXXV.

Fig. 132.

Si diameter (A B) in oppoſitarum ſectionum una (B) rectam lineam (C D) bifariam ſecet (in E); quæ in diametri termino (A) contingit alteram ſectionem (A), lineæ biſectæ (C D) erit æquidiſtans.

a 48. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 22. 1. huj.

Si fieri poteſt, ſit altera D F tangenti parallela. ergo D G [a]= G F. Item D E [b]= E C. [c] ergo C F ad E G eſt parallela. [d] Q.E.A.

Prop. XXXVI.

Fig. 133.

Si in utraque oppoſitarum ſectionum (A, B) ducantur rectæ lineæ (C D, E F) inter ſe æquidiſtantes, quæ (G H) ipſarum medium conjungit, oppoſitarum ſectionum diameter erit.

a 5. hujus.
b 30. 1.
c 48. 1. hujus.
d hyp.
e 9. ax. 1.

Si fieri poteſt, ſit altera G K diameter: [a] ergo tangens per A ad C D parallela eſt; [b] adeóque ad E F. unde E K ([c]= K F = $\frac{1}{2}$ E F [d]=) E H. [e] Q. E. A.

Prop. XXXVII.

Fig. 134.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) ſecet recta linea (C D), non tranſiens per centrum X; quæ (E X) ab ipſius medio (E) ad centrum ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta appellatur: tranſverſa verò diameter, ipſi conjugata, eſt ea (A B), quæ per centrum ducitur æquidiſtans lineæ biſectæ (C D).

a 30. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 4. 6.
e 34. 1.
f 6. hujus.
g 16. 1. hujus.

Ducatur D X ſectioni [a] occurrens in F, & connectatur F C, & producatur B A G. Atque ob C E [b]= E D; & F X [a]= X D [c] erit F C ad X E parallela; & F G [d]= (X E [e]=) G C. [f] quare F C tangenti ad A parallela eſt. [g] ergo A B, & E X ſunt conjugatæ diametri. Q.E.D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 135.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C X, D X), convenientes in uno puncto (X); quæ (X E) ab eo puncto ad medium (E) lineæ (C D) tactus (C, D) conjungentis ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta vocatur, tranſverſa verò ipſi conjugata (A B), quæ per centrum ducitur, æquidiſtans lineæ (C D) tactus conjungenti.

Si fieri poteſt, ſit altera E F recta diameter, cui occurrat D X (producta in F; & connectatur C F, [a] ſectioni occurrens in A; per quod ducatur A B ad C D parallela. ergo A G [b] = G B. item (ob C E [c] = E D) eſt A G [d] = G K. [e] unde G B = G K. [f] *Q. E. A.*

a 32. 1 *hujus.*
*b 12. *def.* 1 *hujus.*
c *hyp.*
d *cor.* 2. 6.
e 1. *ax. f.* 9. *ax.*

Prop. XXXIX.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C E, D E) in unum punctum (E) convenientes; quæ (E F) per punctum illud (E), & centrum ducitur, lineam tactus (C, D) conjungentem bifariam ſecabit. Fig. 136.

Si fieri poteſt, ſit C G = G D. [a] ergo ducta G E erit diameter: [b] atqui F E eſt diameter. ergo interſectio E eſt centrum ſectionis. [c] *Q. E. A.*

a 38. *hujus.*
b *hyp.*
c 32. *hujus.*

Prop. XL.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingentes duæ rectæ lineæ (C E, E D) in unum conveniant; & per punctum (E), in quo conveniunt, ducatur linea (F G) æquidiſtans tactus conjungenti (C D), & ſectionibus occurrens (in F, G); quæ (F H, G H) ab occurſibus ad medium (H) lineæ (C D) tactus conjungenti ducuntur, ſectiones ipſas contingunt. Fig. 137.

Ducatur E H, [a] erit hæc recta diameter; & tranſverſa A B, ducta per centrum X ad C D parallela: unde E X × X H [b] æquatur quartæ parti figuræ ad A B. Hinc, cùm F E [c] ſit ordinatim applicata, [d] liquet F H tangere ſectionem A. Pari modo G H ſectionem B continget. *Q. E. D.*

a 37. *hujus.*
b 38. 1 *hujus.*
c 38. *hujus.*
d 38. 1. *hujus.*

Prop. XLI.

Si in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ (A D, C B), ſe invicem ſecent, (in E) non tranſeuntes per centrum (X), ſeſe bifariam non ſecabunt. Fig. 138.

Ducatur E X; ergo ſi A D, C B ſe mutuò biſecent in E, [a] erit E X diameter conjugata illi X F, quæ per X ducitur ad C B parallela; eritq; E X * tangenti ad F parallela. Pariterque (ductâ X H ad D A parallelâ) erit E X tangenti ad H parallela. [c] Ergo tangentes ad F, H ſibi invicem parallelæ ſunt. [c] *Q. E. A.*

a 37. *hujus.*
* *vid.* 37. *hujus.*
c 31. *hujus.*

Prop. XLII.

Fig. 139. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (E F, G H) ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum (X); biſariam ſeſe non ſecabunt.

Per centrum X ducantur A B ad E F, & C D ad G H parallelæ, &
a 37. *hujus.* connectatur X K: poſito igitur ipſas E F, G H ſe mutuò biſecare, [a] e-
a 5. *hujus.* runt X K, A B, & X K, C D conjugatæ diametri, unde tangens per A tangenti per C erit parallela (utpote utraque ipſi X K) quod fieri ne-
b 21. *hujus.* quit: [b] conveniunt enim hæ ad unam aſymptoton. Ergo E F, G H ſe mutuò non biſecant.

Prop. XLIII.

Fig. 140. Si unam (A) oppoſitarum ſectionum (A, B; C D) quæ conjugatæ appellantur, ſecet recta linea (E F) in duobus punctis (E, F); & à centro (X) ducantur duæ lineæ (X G, X C), una quidem (X G) ad medium (G) lineæ ſecantis (E F), altera verò (X C) ipſi (E F) æquidiſtans, erunt hæ (X G, X C) oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri.

a 5. *hujus.*
b *hyp.* & 30. I. Nam quia tangens in A ad E F [a] parallela eſt; & [b] proinde ad C X,
c 20. *hujus.* [c] erunt A X, C X conjugatæ diametri.

Prop. XLIV. Probl. 2.

Fig. 141. Datâ coni ſectione (A C E), diametrum invenire.

Analyſis. Factum ſit; & ſit C H diameter; & ad hanc ordinatim applicentur A E, B D: biſecat has diameter C H in H, & F.

Compoſitio. Ducatur utcunque recta A E ſectionem ſecans punctis A, E; & huic parallela fiat BD; biſecentur hæ in H & F; & conne-
a 28. *hujus.* ctatur H F C. [a] Erit H C diameter ſectionis. Eodem licet modo infinitas diametros invenire.

Prop. XLV. Probl. 3.

Fig. 142. 143. Datâ ellipſi, vel hyperbola centrum invenire.

a 44. *hujus.* [a] Duæ ducantur utcunque ſectionis diametri A B, C D; erit harum interſectio centrum ſectionis.

Prop. XLVI. Probl. 4.

Datæ parabolæ (F C E) axem invenire. Fig. 144.

Analyſis. Sit C D axis, eique perpendicularis F E; eſt ergo FD
= D E. Quòd ſi ducatur utcunque diameter AB, [a] erit hæc ipſi CD [a] 46. 1. *hujus.*
parallela; atque idcirco ipſi F E perpendicularis. Hinc

Componitur ſic. [a] Ducatur utcunque diameter A B, eique [b] ſtatu- [a] 44. *hujus.*
atur perpendicularis E F; biſectaque E F in D, [b] erigatur perpendi- [b] 11. 1.
cularis D C; erit hæc axis parabolæ: eſt enim D C diameter, [a] quia [c] 18. *def.* 1. *hujus.*
parallela diametro A B; & biſecat ipſi perpendiculares E F, (neque
enim ulla alia ipſas biſecabit) [c] ergo eſt axis.

Prop. XLVII. Probl. 5.

Datæ hyperbolæ, vel ellipſis (A B C) axes invenire. Fig. 145. 146.

Analyſis.

Eſto K D axis; ergo [a] biſecat hæc ſibi perpendiculares utcunque [a] 18. *def.* 1. *hujus.*
ductas A C, in D. Itaque ſi è K [b] centro ſectionis connectantur K A, [b] 45. *hujus.*
KC, [c] erunt K A, K C æquales. Hinc [c] 4. 1.

Compoſitio.

[d] Sume K centrum ſectionis, & centro K duc utcunque circulum [d] 45. *hujus.*
A E C, ſectioni occurrentem punctis A, C, quæ connectat recta AC; Fig. 147. 148.
biſecetur autem A C in D, & connectatur DK. Erit DK axis.

Nam ductis K A, K C, [e] liquet trigona K D A, K D C ſibi mutuò [e] *conſtr.*
eſſe æquilatera, & [f] proinde æquari angulos K D A, K D G; ac idcirco [f] 8. 1.
rectos eſſe: [g] unde K D eſt axis. [g] 18. *def.* 1. *huj.*

Quòd ſi per K ducatur MN ipſi AC parallela, [h] erit M N axis conju- [h] 16. 1. *hujus.* & 19. *def.* 1. *h.*
gatus ipſi K D.

Prop. XLVIII.

His autem demonſtratis, ſupereſt ut oſtendamus non eſſe alios axes ipſarum ſectionum.

Si fieri poteſt, ſit alius axis K G. ergo ductâ ad hanc perpendiculari
A H, [a] erit L H = A H; adeóque (junctâ K L) K L [b] = (K A [c] =) [a] 18. *def.* 1. *huj.*
K C: ideóque circulus A E C etiam tranſit per L, quod in hyperbola [b] 4. 1.
manifeſtè abſurdum; in ellipſi verò, ducantur C R, L S ad M N per- [c] *conſtr.*
pendiculares. Et propter $LSq + SKq \,^{d}= (LKq \,^{e}= CKq \,^{d}=)$ [d] 47. 1.
$CRq + RKq$. & $MS \times SN + SKq \,^{f}= (KMq \,^{f}=)\ MR \times RN,$ [e] *prius.*
$+ R$ [f] 5. 2.

g 17. ax. 1
h 3. ax. 1. $+ RKq$. erit $LSq - CRq$ [g] $= (RKq - SKq$ [g] $=)$ $MS \times SN -$
k 2. ax. 1. $MR \times RN$. & [k] proinde $LSq + MR \times RN = CRq + MS \times$
SN. Verùm (ob ordinatim applicatas LS, CR) eſt $LSq . MS \times$
l 21. 1. *hujus*. SN [l] :: CRq $MR \times RN$. ergo $LSq = MS \times SN$. & $CRq =$
m 25. 5. $MR \times RN$. (Nam ſi $LSq \sqsubset$ vel $\sqsupset MS \times SN$, [m] eſſet hinc LSq
n *conv.* 35. 3. $+ MR \times RN$. $\sqsubset$ vel $\sqsupset CRq + MS \times SN$, contra modò oſtenſa).
[n] Unde ſectio A B C circulus eſſet (non verò Ellipſis) contra hypotheſin.

Prop. XLIX. *Probl.* 6.

Fig. 149. Datâ coni ſectione, & puncto (A), non intra ſectionem, dato, ab eo ducere rectam lineam (A D), quæ ſectionem contingat.

* 47. *hujus*. Sectio data primò ſit Parabola, cujus * axis B E punctum datum A
1. *Caſ.* ſit in ipſa ſectione.

Analyſis. Tangat A D, axi B C occurrens in D, ductâque A E
a 35. *hujus*. ad B C perpendiculari, [a] erit $BE = BD$. Itaque

Compoſ. Si ex dato puncto A ducatur AE perpendicularis axi BC,
b 33. 1. *hujus*. & in axe producto ſumatur $BD = BE$, jungatúrque D A, liquet
[b] hanc parabolen tangere.

2. *Caſ.* Punctum A ſit in ipſo axe.

Fig. 150. *Analyſis.* Tangat A D; ductáque ſit D E axi B C perpendicu-
c 35. 1. *hujus*. laris: itaque rurſus eſt AB [c] $= BE$.

Compoſ. Sumatur $BE = AB$; & ab E ducatur E D axi perpen-
d 33. 1. *hujus*. dicularis; ſectioni occurrens in D, & connectatur D A; [d] continget
hæc ſectionem.

3. *Caſ.* Sin datum punctum coincidat vertici B, [e] liquet ductam per B axi
e 17. 1. *huj.* perpendicularem eſſe contingentem.

4. *Caſ.* Punctum A datum ſit alibi extra axem.

Fig. 151. *Analyſis.* Tangat A D. itaque ductâ A E ad axem B C parallelâ,
f *cor.* 46. & 35. & ordinatim applicatâ D E, erit rurſus GE [f] $= AG$.
1. *hujus*.

Compoſ. Per A ducatur A E axi parallela, factóque $GE = AG$,
g 46. & 33. 1. per E ordinatim applicetur E D, ſectioni occurrens in D, & conjun-
hujus. gatur D A: [g] liquet hanc ſectionem contingere.

h 47. *hujus*.
k 45. *hujus*. Sectio data ſit ſecundò Hyperbola; cujus [h] axis tranſverſus K B,
[k] centrum F, aſymptoti F L, F M.

1. *Caſ.* Punctum datum A ſit in ſectione.

Fig. 152. *Anal.* Tangat A D; & ſit A E perpendicularis axi B C; eſt igi-
m 36. 1. *hujus*. tur $KE . EB$ [m] :: $KD . DB$.

Compoſ. E puncto A ducatur A E axi perpendicularis, [n] ſecetúrque [n] 16. 6.
K B in D, ut ſit K D. D B :: K E. E B; jungatúrque D A. [o] Contin- [o] 34. 1. *bnjus.*
get hæc ſectionem.

Punctum A ſit in axe. 2 *Caſ.*
Anal. Tangat A D, & ſit D E axi perpendicularis: itaque rur- Fig. 153.
ſus K E. E B :: [m] K A. A B.
Compoſ. * Fiat K E. E B :: K A. A B. & per E ducatur axi per- * *Not.* 1.
pendicularis E D, ſectioni occurrens in D; & connectatur D A;
[o] hæc ſectionem continget.

Sit datum punctum A alícubi intra angulum L F M. 3 *Caſ.*
Anal. Tangat A D, junctáque F A producatur, & fiat F O = Fig. 154.
F N; & * ordinatim applicetur D E. Eſt ergo O E. E N [p] :: O A. *
A N. [p] 36. 1. *bujus.*
Compoſ. Juncta F A producatur, & ſumatur F O = F N. fiátque [q] *Not.* 1.
O E. E N [q] :: O A. A N. & ordinatim applicetur E D; jungaturq; [r] 34. 1. *huj.*
D A. [r] Tanget hæc ſectionem.

Sit punctum A in F M unâ aſymptoton. 4 *Caſ.*
Anal. Tangat A D ſectionem, aſymptoto F L occurrens in P; Fig. 155.
ſitque D Q ad L F parallela: atque ob A D [s] = D P, [t] erit A Q [s] 3. *hujus.*
= Q F. Hinc [t] 2. 6.
Compoſ. Biſecetur A F in Q, & per Q ducatur Q D ad F L pa- [u] *conſtr.*
rallela, ſectioni occurrens in D, jungatúrque D A. Continget hæc ſe- [x] 2. 6.
ctionem. Nam productâ A D in p, ob A Q [v] = Q F, [x] erit A D = [y] 9. *hujus.*
D P. [y] quare A D tangit ſectionem.

Punctum A ſit in loco, qui deinceps eſt angulo L F M ſectionem 5. *Caſ.*
continenti.
Anal. Tangat A D; junctáque A F producatur, cui parallela Fig. 156.
utcunque in ſectione ſumatur R S; & biſectâ R S in E, connectatur [z] 2. 37. *hujus.*
E F, & fiat F O = F N; eſt igitur E O diameter [z] ipſi A F conju- [a] *cor.* 38. 1. *huj.*
gatæ; & per D ductâ D T ad E O parallelâ, erit [a] A F × F T quarta
pars figuræ ad O N. Hinc
Compoſitio Juncta A F producatur, eíque parallela utcunque du-
catur R S (ſectioni occurrens punctis R, & S); biſecetur R S in E;
junctâque E F producatur, & fiat F O = F N, [z] ergo O N eſt tranſ-
verſa diameter, ipſi A F conjugata. * Fiat A F × F T æqualis quartæ * *Not.* 2.
parti figuræ ad O N, & per T ducatur T D ad O N parallela, ſectio-
ni occurrens in D, & jungatur D A. [b] Tanget hæc ſectionem. [b] *conv.* 38. 1. *h.*

Sin

6. *Caſ.* Sin aſſignetur punctum A intra angulum Y F Z, nulla inde tangens
c 31. 1. *hujus.* duci poterit; ducta enim linea [c] utramque Y F, Z F ſecabit: ergo
non tanget.

Sit tertiò, ſectio data ellipſis, cujus axis B C, centrum F.

1 *Caſ.* Datum punctum A ſit in ſectione.

Anal. Tangat A D, & A E ordinatim applicetur ad axem. Eſtq;
d 36. 1 *hujus.* C E. E B :: [d] C D. D B.

Compoſ. Ducatur A E perpendicularis axi C B; & producatur
Fig. 157. C B, ut ſic C E. E B [e] :: C D. D B. & connectatur D A. [f] Tanget
e *Not.* 2. hæc Ellipſin.
f 34. 1. *hujus.*

2 *Caſ.* Punctum A ſit extra ſectionem.

Anal. Tangat A D; & juncta A F producatur, & ordinatim ap-
g 36. 1. *hujus.* plicata ſit D E. Eſt itidem O A. A N [g] :: O E. E N.

Fig. 158. *Compoſ.* Connectatur A F ſectioni occurens in N, O; fiátque O A.
h 10. 6. A N [h] :: O E. E N. & per E ad A O ordinatim applicetur E D, ſecti-
k 34. 1. *hujus* oni occurrens in D; & connectatur D A: [k] tanget hæc ſectionem.

Fig. 159. *Not.* 1. Datur recta K B ſecta in A; oportet producere hanc ad
E, ita ut ſit K E. B E :: K A. A B.
a 12. 6. [a] Fiat K A—A B. A B :: K B. B E. ergo componendo erit K A.
A B :: K E. B E. *Q. E. F.*

Prop. L. Probl. 7.

Fig. 160. Datâ coni ſectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad
partes ſectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit ſectio primùm parabole, cujus axis A B.

Fig. 161. *Analyſis.* Tangat D C ſectionem, faciens angulum D parem dato
a 40. *dat.* F. Itaque ductâ C B ad A B perpendiculari, [a] datur ratio D B ad
b 33. 1 *hujus.* B C; ergo datur ratio A B [b] ($\frac{1}{2}$ D B) ad B C. [c] ergo datur angulus
c 41. *dat.* B A C. [d] quare datur poſitio rectæ A C, & inde punctum C, &
d 29. *dat.* hinc tangentis C D poſitio.

Compoſ. Sumpto E puncto utcunque in latere dati anguli ducatur
E G ad alterum latus F G perpendicularis, & biſectà F G in H, jun-
gatur H E, fiátque ang. B A C = ang. G H E: & ab occurſu C du-
f 35. 1. *hujus.* catur C B ad A B perpendicularis; productâque A B, ſumatur A D
g *conſtr. et* 15. = A B; & connectatur D C, [f] liquet hanc tangere ſectionem Et
h 4. 6. (5. quoniam F G. H G [g] :: D B. A B. & H G. G E [h] :: A B. B C (ob
k *conſtr.* ang. G H E [k] = B A C, & [k] rectos ad G & B) erit ex æquo, F G.
G E.

Digitized by Google

G E :: D B. B C. [l] ergo pares ſunt anguli F, D. *Q. E. F.* l 6. 6.

Sit ſecundò Hyperbole, cujus axis A B, centrum X: Fig. 162.
Anal. Tangat D C, faciens angulum parem dato K H G; jun- 163.
gatúrque X C, & ſtatuatur C E axi perpendicularis; eſt igitur data m 37. 1. *hujus.*
ratio X E × E D ad E Cq [m] (eadem quæ T ad R); item [n] datur ratio n 40. *dat.*
E C ad E D (ob datos angulos E D C, & rectum E). [o] ergo datur o 50. & 8. *dat.*
ratio X E × E D ad E Dq; [p] hoc eſt ratio X E ad E D. Proinde [q] da- p 1. 6.
tur ratio X E ad E C. [r] ergo datur angulus E X C, & [s] hinc poſitio q 8. *dat.*
rectæ X C, & hinc punctum C, & hinc tangens C D. r 41. *dat.* s 29. *dat.*

Quòd ſi ducatur aſymptotos X F; [t] liquet angulum E D C majo- t 16. 1.
rem eſſe angulo A X F, quoniam D C [v] producta ipſam X F ſecabit. v 3. *hujus.*
Itaque datus angulus non debet eſſe minor illo, qui ſectionem continet.

Compoſ. Sumatur G punctum utcunque in latere H G dati anguli;
& à G ducatur ad H K perpendicularis G K. [y] Fiat autem T. R :: y *Not.*
M K × K H. K Gq. & connectatur M G: dein fiat ang. A X C = z 49. *hujus.*
ang. K M G; & ab occurſu C [z] ducatur tangens C D. Dico factum. a *conſtr.* & 4. 6.
Ducatur enim C E axi perpendicularis: & propter X E. E C [a] :: b 22. 6.
M K. K G. ac [b] ideò X Eq. E Cq :: M Kq. K Gq. & E Cq. X E × E D c 37. 1. *hujus.*
[c] :: (R. T :: [d]) K Gq. M K × K H; erit ex æquo X Eq. X E × E D. d *conſtr.*
:: M Kq. M K × K H. [e] hoc eſt X E. E D :: M K. K H. Verùm E C. e 1. 6. & 11. 5.
X E [f] :: K G. M K. Ergo rurſus ex æquo E C. E D :: K G. K H. er- f *priùs & inversè.*
go quum anguli E, K recti ſint, [g] erit ang. E D C = K H G. ergo g 6. 6.
factum.

Quòd verò X C ſectioni occurrit, ſic oſtenditur: Ducatur A F ad h *conſtr.*
X A perpendicularis, angulóque A X F fiat æqualis K H L. Cùm igitur k 1. *hujus.*
ſit M K × K H. K Gq (:: [h] T. R [k] ::) X Aq. A Fq [l] :: H Kq. K Lq) l 4. & 22. 6.
[m] ⊏ H Kq. K Gq. [n] erit M K × H K ⊏ H Kq & proinde M Kq ⊏ m *conſtr.* et 8. 5.
M K × H K. & M Kq. K Gq [o] ⊏ (M K × H K. K Gq [p] ::) X Aq. n 10. 5.
A Fq. quare X Eq. E Cq ⊏ X Aq. F Aq. & X E. E Cq (hoc eſt o 8. 5.
X A. A N) ⊏ X A. A F. [r] ergo A N ⊐ A F. quare X C ſecat an- p *priùs.* q 4. 6.
gulum E X F; & [s] propterea ſectioni occurrit. r 10. 5. s 3. *hujus.*

Sit tertiò ſectio ellipſis, cujus axis A B, centrum X. Fig. 164.
Analyſis. Tangat C D, faciens angulum D parem dato G; jun- 165.
gatúrque X C, & ſit C E axi perpendicularis. Eſt itaque data ratio a 37. 1. *hujus.*
C Eq ad E D × E X [a] (eadem quæ R ad T). Item ratio C Eq ad E Dq b 40. *dat.*
[b] datur (ob datos angulos D, & E); [c] ergo datur ratio E Dq ad E D c 8. *dat.*
× E X. [d] hoc eſt ratio E D ad E X. [e] ergo ratio E X ad C E datur. d 1. 6. e 41. *dat.*
[e] quare datur angulus E X C, & hinc [f] poſitio rectæ X C, & inde pun- f 29. *dat.*
ctum C, adeóq; [g] poſitio tangentis C D. g 49. *hujus.*

Compoſ. Sumpto utcunque puncto F in latere dati anguli, ducatur
h *Not.* k 49. *hujus.* FH ad GH perpendicularis; & fiat R. T :: [h] FHq. GH × HK;
l *conſtr.* & 4. junctâque KF, fiat ang. AXC = HKF; & ab occurſu C [k] ducatur
& 22. 6. tangens CD. Dico factum. Nam ductâ CE ad AB perpendiculari,
m 37. 1. *hujus.* propter XEq . ECq [l] :: KHq . HFq . & ECq . ED × XE :: [m]
n *conſtr.* R. T :: [n] HFq. HG × KH . erit ex æquo XEq . ED × XE :: KHq.
o 1. 6. HG × KH. [o] hoc eſt XE. ED :: KH. HG. Item EC. XE :: [p] HF.
p *conſtr. et* 4. 6. HK, ergo rurſus ex æquo ED . EC :: HG. HF. Unde cùm ang.
q 6. 6. E [n] = H, [q] erit quoque ang. D = G. Ergo factum.

Not. Fieri debet R. T :: FHq. GH × HK. Itaque $\frac{T \times FHq}{R \times GH} = HK$.

Compoſ. Fiat R. T :: FH. $Q = \frac{T \times FH}{R}$; tum GH . Q :: FH . $HK = \frac{Q \times FH}{GH} = \frac{T \times FH \times FH}{R \times GH}$

Prop. LI. Probl. 8.

Fig. 166. Datâ coni ſectione lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (Z) æqualem.

a. 50. *hujus.* In parabola facilè conficitur. [a] Tangat enim hanc utcunque CD
b *cor.* 46. 1. *b.* faciens cum axe AB angulum D parem dato Z; & per tactum C ducatur
c. *conſtr.* CE ad AB parallela: [b] Liquet CE eſſe diametrum, & angulum
d. 29. 1. DCE alterno CDA, [c] (hoc eſt dato Z) [d] æquari. *Q. E. F.*
Fig. 167. In hyperbola verò, cujus axis AB, centrum E.
168. *Analyſis.* Tangat CD faciens angulum ECD parem dato; Trigono
autem CDE circumſcribatur circulus; & ductâ per C ad axem
perpendiculari GCZ, per V centrum circuli ducantur VQ ad ZG,
e. 1. 6. & VY ad EG parallelæ, & ſit CS ad GE parallela. Eſtque ZG.
f. 36. 3. & 7. 5. CG [e] :: (ZG × GC. CGq [f] :: EG × GD . CGq [g] ::) T. R. ergo
Z g. 37. 1. *hujus.* dividendo ZC. CG :: T−R. R. & bipartiendo antecedentes [h] YC.
h. 3. 3. k. 34. 1. CG. [k] (hoc eſt VS, SQ) :: $\frac{T-R}{2}$. R. Hinc

l. 33. 3. *Compoſ.* Exponatur utcunque recta FH, ſuper quâ [l] deſcribatur
m. 16. 6. ſegmentum circuli capiens angulum (ut FKH) parem dato Z. A
circuli autem centro N ducatur NO ad FH perpendicularis, [m] ſece-

túrque N O in P, ut ſit NP. PO :: $\frac{T-R}{2}$ R. ducatúrque P K ad FH parallela, circulum ſecans in K, & per K ducatur K L ad protractam F H perpendicularis; & producatur L K M, & perpendicularis huic ducatur N X. Junctâ denique K F, fiat ang. AEC = ang. LFK; & per occurſum C [n] ducatur ſectionem contingens C D. Dico factum.

Ducatur axi perpendicularis C G; & quoniam $\frac{T-R}{2}$. R. [o] :: NP. PO (X K. K L) erit (duplando antecedentes) T—R. R :: M K, K L. & componendo T. R :: M L. K L :: [p] M L × K L. [q] (F L × H L). K Lq :: T. R :: [r] E G × D G. C Gq. Eſt ergo F L. K L + H L. K L [s] (F L × H L. K Lq) = E G. C G + D G. C G (E G × D G. CGq). atqui (ob [t] ſimilia trigona F L K, E G C) [v] eſt F L. K L = E G. C G. ergo H L. K L :: D G. C G. [x] ergo anguli H K L, D C G pares ſunt, & [y] proinde reliqui F K H, E C D etiam pares ſunt. *Q.E.D.*

Quòd verò E C ſectioni occurrat, ſic oſtenditur; ſit E T aſymptotos, & axi A B ducatur perpendicularis A T. Eſtque E A q. A T q [z] :: (T. R :: [a] F L × L H. L Kq) [b] ⊐ F Lq. K Lq, [c] vel E Gq. C Gq. ergo ang. A E T ⊏ ang. A E C; [d] & proinde E C ſectionem ſecat.

Coroll. Si ſit F L × H L. K Lq :: E G × D G. C Gq. erunt trigona H L K, D G C ſimilia.

n 49 *hujus.*
o *conſtr.*
p 1. 6.
q 36. 3.
r 37. 1. *hujus.*
s 23. 6.
t *conſtr.*
u 4. 6.
x 6. 6.
y 3. *ax.* 1.
z 1. *hujus.*
a *conſtr.*
b 8. 5.
c *prius.*
d 2. *hujus.*

Prop. LII.

Si ellipſim (cujus Axes A B, C D, & Centrum E) recta linea (GL) contingat; angulus (L F E), quem facit cum diametro (E F) per tactum (F) ducta, non eſt minor angulo (LCA) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam ſectionem (C) inclinatis continetur.

Fig. 169. 170. 171.

Sit primò E F ad B C parallela: ergo cùm ſit A E [a] = E B, [b] erit A H = H C ergo, cùm E F [c] ſit diameter, [d] erit A C tangenti G L parallela: unde ang. L F H [e] = (C H E [e] =) L C H.

Sed non ſit E F ad B C parallela. ergo ductâ F K ad A B perpendiculari [f] erunt anguli L B E, F E K inæquales, & trigona C B E, F E K diſſimilia. Non igitur eſt E Kq. K Fq :: (B E q. (A E × E B). E Cq, [f] hoc eſt T. R; [g] hoc eſt) G K × K E. K Fq. ergo E Kq, & G K × K E ſunt inæqualia, & proinde G K, K E inæquales ſunt. [h] Capiat circuli ſegmentum M Y N angulum parem angulo A C B: [k] ergo id ſemicirculo ~~[illegible]~~ minus eſt (nam ob A E, vel B E [l] ⊏ E C, [m] eſt uterque angulus

a *hyp.*
b 2. 6.
c *cor.* 47. 1. *huj.*
d 5. *hujus.*
e 29. 1.
f *cor. ad def. ad* 16. 1. *huj.*
g 37. 1. *hujus.*
h 33. 3.
k 31. 3.
l *hyp.* (1.
m 18. 1. *et* 32.

n 10. 6. A C E, B C E ſemirecto major, ideóque ang. A C B obtuſus). [n] Fiat
N X. X M :: G K. K E & per X ducatur ipſi M N perpendicularis
Y X, & connectantur M Y, N Y; biſectâque M N in T, erigatur ei
perpendicularis O T P, in qua ſumpto circuli centro R, ducatur R S ad
Y X perpendicularis; jungantúrque M O, N O: liquet ang. N O T[o]
($\frac{1}{2}$ N O M) angulo B C E [o] ($\frac{1}{2}$ B C A) æquari; ideóque eſſe T Nq.
o 4. 1. T Oq [p]:: E Bq. E Cq. Eſt verò Y S. Γ R q (X S) [r] ⊐ O R. T R. &
p 4. & 22. 6. q 34. 1. converſè S Y. X Y ⊏ R O. T O. & duplando antecedentes Z Y. X Y.
r 8. 5. ⊏ P O. T O. & dividendo Z X. X Y. ([o] hoc eſt Z X × X Y [p] (vel
o 1. 6. N X × X M). X Y q) ⊏ (P Γ. T O q :: T Nq. T Oq [r] :: E Bq. E Cq
p 35. 3. (6. [r] ::) G K × K E. K Fq. Itaque ſi fiat N X × X M. X Vq :: G K × KE.
q cor. 13. & 20. r priùs. K Fq, [s] erit X V ⊏ X Y. Et quoniam N Xq. N X × X M [t] :: (N X.
s 10. 5. X M [v] :: G K. K E [t] ::) G Kq. G K × K E. erit ex æquo NXq. XVq
t 1. 6. :: G Kq. K Fq. [x] & N X. X V :: G K. K F; connexâ igitur N V, [y] e-
u conſtr. rit ang. N V X = ang. G F K. & ſimili diſcurſu ang. M V X =
x 22. 6. y 6. 6. E F K [z] unde totus ang. N V M = G F E. atqui ang. N V M [a] ⊐
z 2. ax. 1. N Y M (A C B). ergo ang. G F E ⊐ A C B, & qui deinceps ang.
a 21. 1. E F L ⊏ L C A. Q. E. D.

Prop. LIII. Probl. 9.

Fig. 172. Datâ ellipſi (A B C D) contingentem lineam ducere, quæ cum
173. diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo
174. * juxta præ- acuto (Y) æqualem. * Oportet autem acutum angulum
175. cedentem. datum non eſſe minorem angulo (A C G) deinceps ei
(A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam ſectionem
inclinatis continetur.

Sit primò datus ang. Y = A C G per centrum E ducatur E K ad B C parallela; & per occurſum K ſectionem contingens G H. Dico factum.

a hyp. Nam ob A E [a] = E B, [b] erit A F = F C: ergo cùm K E ſit diameter,
b 2. 6. [c] erit A C tangenti H G parallela. ergo ang. E K G [d] = (E F C [d] =
c 5. hujus. d 29. 1. A C G = [e]) Y. Q. E. F.

e hyp. Sin. ang. Y ⊏ A C G, erit qui deinceps Z ⊐ A C B. Exponatur
f 33. 3. utcunque circulus, [f] in quo ſegmentum M N P capiat angulum parem
g cor. 1. 3. angulo Z; biſectâque M P in O, ducatur per O ipſi M P perpendi-
h 4. 1. cularis N R [g] (in quo circuli centrum V), & connectantur M N, PN.
k conſtr. l cor. ad defin. Itaque ang. ACE[b] ($\frac{1}{2}$ ACB) ⊏ ang. MNO[h] ($\frac{1}{2}$ MNP, [k] vel $\frac{1}{2}$ Z). quare
ad 16. 1. huj. AE. EC ⊏ MO. O N. & AEq. ECq. [p] (T. R) ⊏ (MOq. [q] (NO × OR).
q 35. 3. ONq [r] ::) OR. ON. ergo componendo T + R. R ⊏ RN. ON. & biparti-
r 1. 6. endo

endo antecedentes $\frac{T+R}{2}$. R $\sqsubset$ VN . ON. dividendóque $\frac{T-R}{2}$.
R $\sqsubset$ VO.ON. Sit $\frac{T-R}{2}$. R :: VO . OI[s] ($\sqsupset$ ON). & per I s 10. 5.
ducatur I X ad MP parallela, & per X ipſa XST ad NR parallela,
& VQ ad MP parallela. ergo cùm $\frac{T-R}{2}$. R[t] :: (VO . OI[u] ::) t constr. (5.
QS. SX. erit componendo $\frac{T+R}{2}$. R :: QX. SX. & duplando u 34. 1. & 11.
antecedentes, T+R. R :: TX. SX. & dividendo T. R :: TS. SX.
Connectantur igitur MX. PX, & fiat ang. AEK = ang. MPX. &
per occurſum K ducatur GH tangens ſectionem. Dico factum. Nam x 21. 3.
ordinatim applicetur KL. éſtque HL × LE. KLq[x] :: (T. R[y] :: TS. y priùs.
SX[z] ::) TS × SX[a] (MS × SP). SXq. [b] ergo HL. KL + LE. z 1. 6. a 35. 3.
KL[b] (HL × LE. KLq $\sqsupset$ MS × SP. SXq[c] =) MS. SX + SP. b 23. 3.
SX. atqui ([d] ob ang. AEK = MPX, & rectos ad L, & S)[c] eſt LE. c 23. 6.
KL :: SP. XS. ergo manet HL. KL :: MS. XS. ergo ang. HKL = d constr.
MXS. ergo totus ang. HKE[f] = (ang. MXP[g] =) ang. Z. & qui e 4. 6. f 2. ax. 1.
deinceps ang. EKG = ang. Y. Ergo factum. g constr.

Coroll. Si HL × LE. KLq :: MS × SP. XSq. Erit trigonum HLK ſimile trigono MSX.

Problema.

Linea EF coni ſectionem ſecet, oportet huic parallelam ducere, quæ ſectionem contingat. Biſecetur EF in C; & per C ducatur diameter ſectioni occurrens in T; & per T ducatur TS ad EF parallela; hæc ſectionem continget. Res liquidò patet. Fig. 176.

APOL-

Digitized by Google

APOLLONII

CONICORUM

LIB. III.

Prop. I.

Fig. 177. SI coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingentes rectæ
178. lineæ (A C, B D) inter ſe conveniant (in E), perque tactus (A,
179. B) ducantur diametri (A D, B C), quæ contingentibus occurrant (in
180. D, C), triangula (A E D, B E C) ad verticem facta, ſibi ipſis æqualia erunt.

Per A ducatur A F ad B D parallela. Eſtque (in parabola) *p g r.*
a 42. 1. *hujus.* A D B F [a] = triang. A C F: ablatóque communi trapezio A E B F,
b 37. 1. *hujus.* reſtat triang. A E D = triang. B E C. *Q. E. D.*
c 1. 6.

d *cor.* 20. 6. In aliis verò ſectionibus (ob G F . G B [b] :: G B. G C) [d] eſt G F.
e 1, & 22. 6. G C. ([c]hoc eſt triang. G F A. G C A) [d] :: (G Fq. G Bq [e] ::) triang.
f 9. 5. G F A. G B D. [f] quare triang. G C A = G B D. & proinde (ablato vel addito communi quadrilatero) remanet triang. A E D = triang. BEC. *Q. E. D.* *Coroll.* Triang. G C A = triang. G B D.

Prop. II.

Fig. 181. Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circumferentia, ſuma-
182. tur aliquod punctum (G), & per ipſum ducantur (K G L, F G M) æ-
183. quidiſtantes contingentibus uſque ad diametros; quadrilaterum (G L
C 184. G I) factum ad (A C) unam contingentium, & ad (B C) unam dia-
185. metrorum, æquale erit triangulo (A I M), quod ad eandem contingen-
186. tem (A C) & ad alteram diametrum (AD) conſtituitur.

Nam ob triangulum G K M [a] æquale quadrilatero A K L C, liquet a 42, *vel* 43.
(addito vel ablato communi A I G K) tota, vel reſidua A I M, G I C L 1. *hujus.*
æquari.

Prop. III.

Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circumferentia, ſumantur duo puncta (F, G) & per ipſa ducantur (F H K L, N F I M, & G H P R, N G X O) æquidiſtantes contingentibus, uſque ad diametros, quadrilatera ((L G, R F, & L N, R N) quæ ab ipſis fiunt, in diametris conſtituta, inter ſe æqualia erunt. Fig. 187. 188. 189.

Nam quadrilat. G O L H + 4lat. H L C P [a] = 4lat. G O C P a 19. *ax.* 1.
[b] = triang. A R P = [a] 4lat. M I P R + triang. A I M [c] (hoc eſt = b 2. 3. *hujus.*
4lat. M I P R + 4lat. F L C I [d] =) 4lat. M F H R + 4lat. H L C P. c 2. *ax.* 1. & 2. 3. *hujus.*
[e] ergo 4lat. G O L H = 4lat. M F H R. & [f] proinde etiam qua- d 2, & 3. *ax.* 1.
drilat. N O L F = quadrilat. N M R G. *Q. E. D.* e 3. *ax.* 1. f 2. *ax.* 1.

Prop. IV.

Si quæ oppoſitas ſectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) inter ſe conveniant (in C), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A D H, B D G) contingentibus occurrentes (in F, G); triangula (A C F, B C G), quæ ad contingentes conſtituuntur, ſibi ipſis æqualia erunt. Fig. 190.

Per H ducatur tangens H L. [a] Hæc tangenti A G parallela erit; [b] & a *cor.* ~~44~~ 15.1. *hujus.*
A D = H D. quare triang. A G D. [c] = (triang. H L D [d] =) triang. b 30. 1. *hujus.*
B F D. Proinde (addito communi G D F C) erit triang. A C F = c 4. 6. & 8. 1.
triang. B C G. *Q. E. D.* d 1. 3. *hujus.*

Prop. V.

Si, quæ oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ (E D, F D) ſibi ipſis occurrant (in D), & in ſectionum quavis (B) ſumatur aliquod punctum (G), à quo ducantur duæ lineæ, una quidem G M æquidiſtans contingenti (F D), altera verò (G K H L) æquidiſtans ei (F E), quæ tactus (E, F) conjungit, triangulum (G H M), quod ab ipſis conſtituitur ad diametrum (C D) per occurſum ductæ, à triangulo (K H D), quod eſt ad occurſum contingentium, differt triangulo (F K L) facto ad contingentes, & ad diametrum (F C), quæ per tactum (F) ducta fuerit. Fig. 191.

Nam

a 29. & 38. 2. *h.* Nam ob [a]diametrum C D, & ordinatim applicatam F E, [b] atque
b *hyp.* G L, G M ipſis F E, F D parallelas, [c] liquet eſſe triang. M G H =
c 45. 1. *hujus.* triang. C H L + C D F = triang. K H D + F K L.

Coroll. Triang. K F L = quadrilat. M G K D.

Prop. VI.

Fig. 192. 193. Iiſdem poſitis, ſi in una oppoſitarum ſectionum ſumatur aliquod punctum (K), & ab eo ducantur rectæ lineæ (K L M, K N X) contingentibus (A F, B G) æquidiſtantes, quæ & contingentibus (A F, B G), & diametris (A E C, B E D) occurrant; quadrilaterum (KF) ab ipſis factum ad unam contingentium (A F), & ad unam diametrorum (B D) æquale erit triangulo (A I N) quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum (A C) conſtituitur.

a 2. 3. *hujus.* Nam (in 1. fig.) triang. K O N [a]= 4lat. A O M F. unde (addito
communi A I K O) triang. A I N = 4lat. K F. Item (in 2 fig.) ductâ
b 2. 3. *hujus.* contingente C O P; [b] erit triang. C O N = 4lat. K P. additóque
c 4. 3. *hujus.* communi O E, triang. C P E ([c]hoc eſt triang. B G E, [d] hoc eſt triang.
d 1. 3. *hujus.* A F E) [e]= 4lat. K E. quare itidem addito communi E I, [e] erit tri-
e 2. *ax.* 1. ang. A I N = 4lat. K F. *Q. E. D.*

Cor. Triang. A F E = 4lat. K E.

Prop. VII.

Fig. 194. Iiſdem poſitis, ſi in utraque ſectione (A B, C D) ſumantur aliqua puncta (K, L), & ab ipſis ducantur contingentibus æquidiſtantes (M K P R X, N S T L W), quæ & contingentibus & diametris occurrant, quadrilatera (K T, L I, & K Y, L R) à lineis ductis conſtituta ad diametros, inter ſe æqualia erunt.

I

a 2. *hujus.* Nam ob quadrilat. K R F O [a] = triang. A O I, erit 4lat. K R E I
b 2. *ax.* 1. [b]= (triang. A E F [c]=) 4lat. L E. [b]unde 4lat. K R T N = 4lat. L I;
c *cor.* 6. *hujus.* [b]& 4lat. K X Y ~~O~~ = L R. Quæ *E. D.*
I

Prop. VIII.

Fig. 195. Iiſdem poſitis, pro punctis K, L ſumantur C, D, in quibus diametri (AC, B D) cum ſectionibus conveniant, & per ipſa ducantur contingentibus æquidiſtantes (D X, C T); dico quadrilaterum D G quadrilatero

Digitized by Goog

drilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale eſſe.

Nam ob trigona A E F, B E G[a] æqualia, [b] erit A E. E G :: B E. a 1. *hujus.*
E F; & [c] converſè, A E. A G :: B E. B F. item A C. A E :: ([d] 2. 1[d] ::) b 15. 6.
B D. B E. ergo ex æquali A C. AG :: BD. B F. ergo [e] triang. ACT. c *cor.* 19. 5.
A G H :: triang. B D X. B F H. atqui triang. A G H [f] = B F H. d 30. 1.
ergo triang. A C T [g] = B D X: [h] quare 4lat. C H = 4lat. D H. & e 22. 6.
4lat. C F = 4lat. D G. Adhæc triang. C E O [k] = triang A E F [l] = f 1. *hujus.*
triang. B E G [k] = triang. D E I. [m] ergo 4lat. X I = T O. Quæ g 14. 5.
E. D. h 3. *ax.* 1.
k ~~2. 1.~~ 4. 3. 5
l *cor.* 1. *hujus.*
m 2. *ax.* 1.

Prop. IX.

Iiſdem poſitis, ſi alterum quidem punctum, ut K, ſit inter diametros, alterum vero ſit idem quod unum punctorum C, D, ut C; & ducantur æquidiſtantes; dico triangulum C E O æquale eſſe quadrilatero K E, & quadrilaterum L O ipſi L M æquale eſſe. Fig. 196.

Nam triang. C E O [a] = (triang. A E F [b] =) 4lat K E. [c] ergo tri- a 4. *hujus.*
ang C R M = 4lat. K O. & 4lat. L M = 4lat. L O. b *cor.* 6. *huj.*
c 3. *ax.* 1.

Prop. X.

Iiſdem poſitis ſumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri ſectionibus occurrunt; demonſtrandum eſt quadrilaterum L T R X quadrilatero ω X K I æquale eſſe. Fig. 197.

Nam triang. T Y E — Y ω L [a] = (triang. B E G [b] = triang. a 43. 1. *hujus.*
A E F [a] =) triang X E I — X R K. [c] ergo triang. T Y E + X R K b 1. *hujus.*
= triang. X E I + Y ω L. additoque utrinque ſpatio K X E Y L χ, c 1. *ax.* 1.
[c] erit 4lat. L T R χ = ω χ K I. *Q. E. D.*

Prop. XI.

Iiſdem poſitis, ſi in quavis ſectione (A B) ſumatur punctum B, & ab ipſo lineæ æquidiſtantes ducantur; una quidem (B M) contingenti (A E) æquidiſtans, altera verò (B L) æquidiſtans ei (A D) quæ tactus conjungit; triangulum (B F M) quod ab ipſis fit ad diametrum (G M) per occurſum (E) contingentium ductam, à triangulo (AKL) contento lineâ contingente (A K) & diametro (A H L) per tactum, differt triangulo (K E F), quod ad contingentium occurſum conſtituitur. Fig. 198.

a 45. 1 *hujus.* Nam triang. B M F [a] = (triang. L H F + triang. H A E [b] =)
b 19. *ax.* 1. triang. A K L + triang. K F E.
c 3. *ax.* 1. *Cor.* 4 lat. B K E M [c] = triang. A K L.

Prop. XII.

Fig. 199. Iiſdem poſitis, ſi in una ſectione (AB) ſumantur duo puncta (B, K), & ab utriſque ſimiliter ducantur æquidiſtantes (B L M N, K O X P ad A D; & B X K, K L S ad B E); quadrilatera (B P, K R) ab ipſis conſtituta, æqualia erunt.

a *cor.* 11. *huj.* Nam quia triang. A O P [a] = 4lat K O E S; & triang. A M N [a] =
4lat B M E R; [b] erit 4 lat. M O P N (= triang A O P — triang.
b 3. *ax.* 1. A M N) [b] = (4lat K O E S — 4lat B M E R [b] =) 4lat K X R S
c 2. *ax.* 1. — 4lat B M O X. [c] unde 4lat K X R S = (4lat M O P N +
4lat B M O X =) 4lat B X P N. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 200. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D), quæ conjugatæ appellan-
G tur, rectæ lineæ (A F, B E) contingentes ſectiones (A, B), quæ deinceps ſunt, in unum punctum (E) conveniant, & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H C, B H D); triangula (B F H, A G H), quorum communis vertex eſt ſectionum centrum (H), inter ſe æquales erunt.

a 20.2. *hujus.* Per puncta A, & H ducantur A K, L H M ad B E parallelæ; [a] li-
b 4. 6. quetque eſſe L M, D B diametros conjugatas. Itaque K H. H B [b] (hoc
c 38. 1. *hujus.* eſt A H. H F) [c] :: H B. H G. [d] ergo triang. A G H [d] = triang. B H F.
d *Not.* *Q. E. D.*
e 12. 6.
f 11. 5. *Not.* [e] Sit H X. H F :: (H B. H G [f] :: A H. H F) [g] ergo H X =
g 9. 5. A H. & ideo triang. A E H [h] = triang. H G X [k] = triang. B H F.
h 1. 6.
k 15. 6.

Prop. XIV.

Fig. 201. Iiſdem poſitis, ſi in quavis ſectione (B) ſumatur punctum (X), & ab ipſo ducantur lineæ (X R S, X O T) æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros (B H D, A H C); triangulum (O H T), quod ad centrum (H) conſtituitur, à triangulo (X T S) circa eundem angulum (T) differt triangulo (H B F, vel A G H) baſin habenti lineam contingentem (B F, vel A G) & verticem ſectionum centrum (H).

Ducatur A Y ad B F parallela; & propter [a] conjugatas diametros L M, D B; & huic ordinatim applicatam A Y, [b] erit A Y. Y G [c] (hoc eſt X T. T S) = H Y. Y A [c] (H B. B F) + T. R. [d] quare triang. O H T = (triang. X T S + triang. B F H. [e] =) triang. X T S + triang A G H. *Q. E. D.*

a 20. 2 *hujus.*
b 40. 1 *hujus.*
c 4. 6.
d 41. 1. *hujus.*
e 13. *hujus.* & 1. *ax.*

Prop. XV.

Fig. 202. 203.

Si oppoſitarum ſectionum (A B, G S, T, X) quæ conjugatæ appellantur, unam (A B) contingentes rectæ lineæ (A D E, B D C) conveniant (in D), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H F, B H T); ſumatur autem punctum (S) in quavis (G S) ſectionum conjugatarum, & ab ipſo ducantur contingentibus æquidiſtantes (S L, S Y) uſque ad diametros (B T, A F) triangulum (S L Y), quod ab ipſis ad ſectionem conſtituitur, majus eſt quàm triangulum (H L F), quod ad centrum (H), triangulo (H C B) baſin habenti lineam contingentem (B C) & verticem (H) centrum ſectionum.

Ducantur X H G ad B C, & G I K ad A E, & S O ad B T parallelæ. Fiantque D B. B E [a] :: M N. 2 B C [b] :: M P ($\frac{1}{2}$ M N). B C. [c] atque X G. T B :: T B. R. Liquet X G, B T [d] fore conjugatas diametros; & S O (vel L H) [e] ordinatim applicari ad X G, & [f] M N fore rectum latus figuræ ad B T, [g] & R rectum latus figuræ ad X G. Porro D Bq. D B × B E [b] :: (D B. B E [k] :: M P. B C [h] ::) M P × B H. [l] (H Gq). B C × B H. permutandóque D Bq. H Gq [m] (hoc eſt triang. D B E. triang. G H I) :: D B × B E. B C × B H [n] :: triang. D B E. triang C B H. unde triang. G H I [o] = triang. C B H. Atqui H L. L F. [p] :: (H B. B C [q] :: H B. M P [r] (R. X G) + M P. B C [s] (D B. B E vel G H. H I) =) R. X G + G H. H I [t] = H L. L F. [u] unde triang. S L Y = (triang. H L F + triang. H G I [x] =) triang. H L F + triang. C B H. *Q. E. D.*

Not. D B × B E. B C × B H :: triang. D B E. triang. C B H. Nam ducantur C V, D Q ad B H perpendiculares. Eſtque D Q × B E. D B × B E [a] :: (D Q. D B [b] :: C V. C B [a] ::) C V × B H. C B × B H. & permutando D Q × B E [c] (hoc eſt 2 triang. D B E). C V × B H [c] (2 triang. C B H) :: D B × B E. C B × B H [d] :: triang. D B E. triang. C B H.

a 12. 6.
b 15. 5.
c 11. 6.
d 20. 2. *hujus.*
e 47. 1. *hujus.*
f 51. 1. *hujus.*
g 4. *def.* ad 16. 1. *hujus.*
h 1. 6.
k *conſtr.* (6.
l *priùs.* & 17.
m 22. 6.
n *Not.*
o 9. 5.
p 4. 6.
q 5. *def.* 6.
r *cor.* 20 2 *hujus.* & 15. 5.
s *conſtr.*
t 11. 5.
u 41. 1. *hujus.*
x 2. *ax.*
a 1. 6.
b 4. 6.
c 41. 1.
d 11. & 15. 5.

Prop. XVI.

Fig. 204. 205.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, B C) in unum conveniant (in C); & ab aliquo puncto (D) eorum, quæ ſunt in ſectione, ducatur linea (D F) uni (B C) contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem, & alteram (AC) contingentium ſecet (in E, & F); ut quadrata contingentium (B C, A C) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (F E, E D) quæ interjiciuntur inter ſectionem & contingentem, ad quadratum lineæ (A E) inter æquidiſtantem (F E) & tactum (A) interjectæ.

a 46. & 47. 1.
b 6. 2. (huj.
c 1. hujus.
d 16. 5. & 22. 6.
e 19. 5.
f priùs.
g 2. hujus.
h 22. 6.

Per A, B ducantur diametri A G H, K B L; & D N ad A C parallela. [a] Liquet eſſe F K = K D. [b] unde F E × E D + D Kq = EKq. Item C Bq. triang C B L [c] (triang C A H) [d] :: E Kq triang. E K L [d] :: D Kq. triang D K N [e] :: E K q — D Kq. triang E K L — triang D K N (hoc eſt [f] ::) F E × E D. 4lat D L ([g] = triang AEG). ergo permutatim C Bq. F E × E D :: (triang C A H. triang A E G [h] ::) C Aq A Eq. vel iterum permutando C Bq. C Aq :: F E × E D. AEq. *Q. E. D.*

Coroll. 1. F E × E D. C Bq :: A Eq. A Cq.

$$2.\ K\left\{\begin{matrix}\text{D Kq. triang. D K N} ::\\ \text{C Bq triang. C B L} ::\end{matrix}\right\}\text{F E} \times \text{E D. 4lat. D L.}$$

Prop. XVII.

Fig. 207. 208.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) in unum conveniant (in C); ſumantur autem in ſectione duo quævis puncta (D, E), & ab iis ducantur lineæ (EFIK, D F G H) contingentibus æquidiſtantes), quæ & ſibi ipſis, & * lineæ occurrant; ut quadrata contingentium (A C, B C) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (K F, F E), quæ interjiciuntur inter ſectionem, & linearum occurſum (F), ad rectangulum quod lineis (HF, FD) ſimiliter ſumptis continetur.

* ſectioni.

* Cor. 2. præc.
a 3. hujus.
b 16. 5. & 22. 6. 4. 6.
c 1. hujus.

Per A, B ducantur diametri A M L N, B X O P, & D X, E M tangentibus parallelæ. Eſtque K F × F E. 4lat F M [a] (vel 4lat. F X) * :: (E I q triang E I M [b] ::) A Cq. triang A C N [c] (vel triang B C P). Similique diſcurſu, H F × F D 4lat F X :: C Bq. triang B C P. & inversè 4lat F X. H F × F D :: triang. B C P. C Bq.

ergo ex æquali K F × F E. H F × F E :: A Cq. C Bq. *Q. E. D.* Fig. 209.

Si punctum F intra ſectionem cadat, ſimilis eſt diſcurſus, niſi quòd *pro.* 6. 2. adhiberi debeat 5. 2 *Elem.* (in præcedenti.)

Prop. X V I I I.

Si oppoſitas ſectiones (A B, M N) contingentes duæ rectæ lineæ (A C L E, B C H) inter ſe conveniant (in C); ſumatur autem in quavis ſectione (M N) aliquod punctum (D), & ab eo ducatur linea (D F G E) uni contingentium (B C) æquidiſtans, quæ & ſectionem, & alteram contingentium ſecet in (F, & E): ut quadrata contingentium (B C, C A) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (F E, E D), quæ interjiciuntur inter ſectionem & contingentem (A E) ad quadratum lineæ (A E) inter æquidiſtantem (F E), & tactum (A) interjectæ. Fig. 210.

Ducatur D X ad A E parallela. Eſtque F E × E D + D Oq[a] = a 48. 1. *huj.* & 6. 2.
O Eq. ac B Cq. triang B C L[c] (vel triang A C H)[b] :: (O E q. tri- b 16.5. *et* 22.6
ang, O E L[b] :: DOq. triang D O X[d] :: F E × E D. 4lat. D L[c] (vel c 1. *hujus.*
triang. A E G). itemque triang. A C H. A Cq[b] :: triang. A E G. d 19. 5.
A Eq. Ergo ex æquali B Cq. A Cq :: F E × E D. A Eq. *Q. E. D.* e 6. *hujus.*

Prop. X I X.

Si quæ oppoſitas ſectiones contingunt duæ rectæ (A F, D F) in unum conveniant (in F), & ducantur contingentibus æquidiſtantes, (G H I K L, M N X O L) quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant; ut quadrata contingentium (A F, F D) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (G L, L I) quæ interjiciuntur inter ſectionem, & linearum occurſum, ad rectangulum, quod lineis (M L, L X) ſimiliter ſumptis continetur. Fig. 211.

Sint H A E C, N D E B diametri, & X R, I P tangentibus A F,
D F parallelæ. Eſtque A Fq. triang A F S[a] (vel triang D F T)[b] :: a 4. *hujus.*
(H Lq. triang H L O[b] :: H Iq. triang H I P[c] ::) G L × L I. 4lat b 16.5. *et* 22.6
I M O[d] (vel 4lat K X). itemque triang D F T. D Fq[c] :: 4lat K X c 2 *cor.* 16. *huj.*
M L × L X. ergo ex æquo A Fq. D Fq :: G L × L I. M L × L X. d 7. *hujus.*
Q. E. D.

Prop. X X.

Si quæ oppoſitas ſectiones (A B, C D) contingunt duæ rectæ lineæ (A F, C F) ſibi invicem occurrant; & per occurſum (E) ducatur linea Fig. 212.

nea (B F H D) tactus conjungenti (A C) æquidiſtans, quæ ſecet utramque ſectionem (in B D); ducatur autem alia linea (G L S M N X) æquidiſtans eidem, ſectioneſque & contingentes ſecans: erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ inter occurſum ſectionum, & ſectones interjiciuntur, ad quadratum lineæ contingentis (A F), ita rectangulum, quod continetur lineis (G L, L X) interſectiones, & contingentem interjectis, ad quadratum lineæ (A L) ad tactum abſciſſæ.

contingentium

a 38. et 39 2. bujus. Sint A E H, E F diametri; ducantúrque G P, B R ad A $\overset{F}{R}$ parallelæ. Eſtque B Fq. [a] (BF × F D). triang B F R [b] (triang A F H)
b 45. 1. bujus. [c] :: L Sq. triang L S H^{d} F :: G L × L X. 4lat G L F P [e] (triang ALN). M
c 16. 3. & 22.
d 19. 5. (6. Item triang A F H. A Fq [c] :: triang A L N. A Lq. ergo ex æquo
e 5. bujus. B F × F D. A Fq :: G L × L X. A Lq. *Q. E. D.*

Coroll. Triang. B F R. B F × F D :: 4lat G L F P. GL × L X.

Prop. X X I.

Fig. 213. Iiſdem poſitis, ſi in ſectione ſumantur duo puncta (G, K), & per ipſa ducantur rectæ lineæ; una quidem (N X G O P, vel K S T) contingenti (A F) æquidiſtans; altera vero (G L M, vel K O V X Ψ ω) lineæ (A C) tactus conjungenti æquidiſtans; quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: Erit ut rectangulum contentum lineis (B F, FD), quæ interjiciuntur inter occurſum contingentium, & ſectiones, ad quadratum contingentis (A F); ita rectangulum contentum lineis (K O, O ω) inter ſectiones, & linearum occurſum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (N O, O G) ſimiliter ſumptis continetur.

a 41. 1. huj. Nam A Fq. triang A F H [a] (triang B Y F) [b] :: X O q. triang.
b 16. 5. et 22. 6 X O Ψ [b] :: X G q triang X G M [c] :: N O × O G. 4lat G O Ψ M
c cor. 16. huj. [d] (4lat K O R T). [e] Item triang. B Y F. B F × F D :: [e] 4lat KORT.
d 12. bujus. K O × O ω. ergo ex æquali A F q. B F × F D :: N O × O G. K O ×
e cor. præced. O ω. atque inverſè.

Prop. X X I I.

Fig. 214. Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (A C, B D) inter ſe æquidiſtantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant (una quidem K E M) contingentibus æquidiſtans, altera verò (G X E) æquidiſtans ei (A B), quæ tactus conjungit: erit ut tranſverſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam (A B) tactus conjungentem conſtituitur; ita rectangulum contentum

lineis (G E, X E) inter ſectionem, & linearum occurſum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (K E, E M) ſimiliter ſumptis continetur.

Ducantur G F, X N ad A C parallelæ: hæ (& parallela his K M) a 31. 2. *hujus.*
ad [a] diametrum A B ordinatim applicantur: quare B L × L A. K L q b 21. 1. *hujus.*
[b] :: (A B. R [b] :: B N × N A [c] (F A × N A). X N q [d] :: B L × L A — F A c *cor.* 16. 1. *hujus.*
× N A. K L q — X N q (— E L q) (hoc eſt) [e] :: F L × L N. [f] K E × E M. d 19. 5.
atqui F L × L N [g] = G E × E X. [h] ergo A B. R :: G E × E X. K E × e *Not.*
E M. *Q. E. D.* f 5. 2.
Not. [e] Quod F L × L N = B L × L A — F A × N A ſic patet. g 34. & *ſch.* 48. 1.
Biſecetur B A, vel F N in Z. Eſtque B L × L A + Z A q [k] = (Z L q h 7, & 11. 5.
[k] = F L × L N + Z N q [l] =) F L × L N + F A × A N + Z A q k 2. 6. 6. 2
(nam Z N q [k] = B N × A N + Z A q). ergo B L × L A = F L × l 2. *ax.* 1.
L N + F A × A N.

Prop. XXIII.

Fig. 215.

Si in oppoſitis ſectionibus (A B, C D, E F, G H), quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (A L, E L), contingentes oppoſitas ſectiones (A B, E F) conveniant in quavis ſectione (in L); ducantur autem aliquæ lineæ (G O, H S) æquidiſtantes contingentibus (A L, E L; quæ & ſibi ipſis, & aliis ſectionibus (C D, G H) occurrant: ut quadrata contingentium (A L, E L) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (G X, X O) quæ inter ſectiones, & occurſum (X) interjiciuntur ad rectangulum, quod lineis (H X, X S) ſimiliter ſumptis continetur.

Ducantur S T ad A L, & O Y ad E L parallelæ. Eſtque H P * =
P S, & G M * = M O; ac E L q. triang E V L. [a] (triang. A L χ) a 4 *hujus.*
[b] :: P X q triang P N X [c] :: H X × H S. 4lat T N X S [d] (X R Y O). b 16. 5. et 22.
Item triang. A L χ. A L q [c] :: 4lat. X R Y O. G X × X O. ex æquo c *ut ſæpe prius.*
igitur E L q. A L q :: H X × X S. G X × X O. Quod *E. D.* d facile deducitur e 15 hujus

Prop. XXIV. (1)

Fig. 216. 217.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quas conjugatas appellamus, à centro (E) ad ſectiones ducantur duæ lineæ (A C, D B) quarum una quidem (A C) ſit tranſverſa diameter, altera verò (D B) recta; & ducantur aliæ lineæ (F L, M R) his diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant, ita ut occurſus (*X*) ſit in loco inter quatuor ſectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus (F X, X L) lineæ diametro tranſverſæ æquidiſtantis, unà cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus (M X, X R) lineæ æquidiſtantis rectæ diametro proportionem habet eandem, quam diametri rectæ (D B) quadratum ad quadratum tranſverſæ (A C); æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia (A E) tranſverſæ diametri conſtituitur.

1 *Not.* $RN \times MN + NX \times PX = RX \times XM$. Nam $NX \times PX +$
o 5. 2. OXq [o] $= ONq$. [p] ergo $NX \times PX + OXq + RN \times NM =$
p 2. ax. 1. $(ONq + RN \times NM$ [o] $= OMq =) RX \times XM + OXq$. unde
q 3. ax. 1. (auferendo OXq utrinque) [q] erit $NX \times PX + RN \times NM =$
$RX \times XM$.

2 *Not.* $LX \times XF + XH \times XK = FK \times HF$ (vel $LH \times HF$)
r 6. 2. Nam $KX \times XH + IHq$ [r] $= IXq$. [s] quare $KX + XH + IHq +$
s 2. ax. 1. $LX \times XF = (IXq + LX \times XF$ [t] $= IFq$ [t] $=) LH \times HF + IHq$.
t 5. 2. & (auferendo commune IHq) [u] erit $KX \times XH + LX \times XF =$
u 3. ax. 1. $LH \times HF$.

a 15. 5. Sint S E T, V E Y aſymptoti; ſitque occurſus primò in angulo
b 56. 1. & 1. 2 hujus. S E V, vel S E Y. Per A ducatur tangens S A V. Eſtque $DBq . ACq$
[a] $:: (DEq . AEq$ [b] (hoc eſt) $:: SA \times AV . AEq$ [c] $= SA . AE +$
c 23. 6. $AV . AE$ (hoc eſt) [d] $:: NX . XH + PX . XK$ [e] $=) NX \times PX . XH$
d 4. 6. $\times XK$ [e] $:: DEq + NX \times PX . AEq + XH \times XK$ [f] (hoc eſt $::$)
e 12. 5. $PM \times MN$ [g] (vel $RN \times MN$) $+ NX \times PX$. [f] $LH \times HF$ [g] (vel
f 11. 2. hujus. $FK \times HF) + XH \times XK$ (hoc eſt) [h] $::) RX \times XM . FK \times HF +$
g 8. 2. hujus. $XH \times XK$ [k] $::) DBq . ACq$. atqui $LX \times XF + XH \times XK$ [l] $= FK$
h 1 Not. $\times HF$ [f] $= AEq$. ergo $LX \times XF + LH \times HF + XH \times XK =$
k 11. 5. $2 AEq$. *Q. E. D.* Sin occurſus H ſit in aſymptoto, erit $FH \times HL$
l 2 Not. [f] $= AEq$. [f] & $MH \times HR = DEq$ unde $DEq . AEq$ [n] $:: MH \times$
m 2 ax. 1. $HR . FH \times HL$. & $2 FH \times HL$ [m] $= 2 AEq$.
n 7. 5.

Prop. XXV.

Fig. 219. Iiſdem poſitis, ſit linearum ipſis A C, B D æquidiſtantium occurſus in una ſectionum (D B) atque in puncto X, ut poſitum eſt: Dico rectangulum (O X N) contentum portionibus lineæ, quæ tranſverſæ diametro (A C) æquidiſtat, majus eſſe, majus eſt quam illud, ad quod rectangulum (R X M), ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro (D B), eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati ejus, quod a dimidia tranſverſæ diametri conſtituitur.

a 11. 2 hujus.
* 10. 2 hujus.
b ſupr in præc. Nam DEq [a] (id eſt $PM \times MH$). EAq [*] $(LK \times KS) ::$ [b] $PX \times XH$.

$XH.\ SX \times XL$ [c]$::\ RX \times XM.\ TX \times XK :: DEq.\ EAq$; [d] atqui $OT \times TN = 2AEq.$ [e] ideóque $OX \times XN$ [f] (hoc eſt $TX \times XK + OT \times TN) = TX \times XK + 2AEq.$ *Q. E. D.*

Not. * $PX \times XH - PM \times MH = RX \times XM.$ & x $SX \times XL - LK \times KS = TX \times XK.$

Not. $OX \times XN$ z $= TX \times XK + OT \times TN.$

c 19.5. *Not.* 1.
d 23. 2 *hujus.*
e 2. *ax.* 1.
f *Not.*
* *vid. Not. ad* 22 *hujus.*
x *v. not. ad* 24 *b.*
z *v. not. ad* 24 *b.*

Prop. XXVI.

Fig. 220.

Quòd ſi æquidiſtantium occurſus ad punctum X ſit in una ſectionum A C, ut poſitum eſt; rectangulum (L X F), quod continetur portionibus lineæ æquidiſtantis tranſverſæ diametro (A C), minus erit quàm illud, ad quod rectangulum (R X G), portionibus alterius lineæ contentum, eandem proportionem habet quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia tranſverſæ diametri conſtituitur.

Nam (ſimili ratione) D Eq. [a](hoc eſt $VG \times GS$, [b] vel $RS \times SG$). $AEq :: VX \times XS.\ KX \times XH$ [c]$::\ RS \times SG + VX \times XS.\ AEq + KX \times XS$ [d](hoc eſt) $:: RX \times XG.\ AEq + KX \times XH.$ Atqui AEq [e]$= (LH \times HF =) KX \times XH - LX \times XF.$ & [f] proinde $2AEq + LX \times XF = KX \times XH + AEq.$

Not. 1.* $RS \times SG + VX \times XS = RX \times XG.$
2. g $LH \times HF = KX \times XH - LX \times XF.$

a 11. 2 *hujus.*
b 8. 2. *hujus.*
c 12. 5.
d *Not.*
e 11. 2. *huj.*
f 2 *ax.* 1. *huj.*
* *vid. Not.* 2. *ad* 24. *hujus.*
g *v not. ad* 22. *hujus.*

Prop. XXVII.

Fig. 221.

Si in Ellipſi vel circuli circumferentia ducantur conjugatæ diametri (A C, B D), quarum altera quidem (A C) ſit recta, altera verò (BD) tranſverſa: & ducantur duæ rectæ lineæ (K M, N H) diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: quadrata ex portionibus (N F, F H) lineæ æquidiſtantis tranſverſæ diametro, quæ inter ſectionem, & linearum occurſum interjiciuntur, aſſumentia figuras (K F × Z, & F M × Y) ex portionibus (K F, F M) lineæ, quæ rectæ diametro æquidiſtat, inter linearum occurſum (F), & ſectionem interjectis, ſimiles & ſimiliter deſcriptas ei, quæ ad rectam diametrum conſtituitur, quadrato tranſverſæ diametri æqualia erunt.

Ducatur N X ad A E parallela. Sintque R, S recta latera pro dia-

Digitized by Google

a 12. 6.
b 16. 5.
c 21. 1. *bujus.*
e *conſtr.*
f 1. 6.
g 9. 5.
h 5. 2.
k 2. *ax.* 1.
l 9. 2.
m *ex.* 9. 2.
n 2 *ax.* 1.
o 4. 2.

metris B D, A C; [a]fiántque N X. V :: A C. S :: K L. X. Et propter R, A C, B D, S ÷÷ [b] erit R. B D [c] hoc eſt N Xq. D X × X B) :: A C. S [e] :: N X. V [f] :: N Xq. NX × V. Unde N X × V [g] = (D X × X B [h] =) B Eq − X Eq (− N Gq). Simili diſcurſu K L × X = B Eq − F Gq. [k] ergo N X × V + K L × X + N Gq + F G q = 2 B E q. [l]atqui 2 N Gq + 2 F Gq = H Fq + F Nq. & 2 N X × V + 2 K L × X (hoc eſt 2 F L × V + 2 K L × X) [m] = F M × Y + K F × Z. [n]ergo H F q + F N q + F M × Y + K F × Z = 4 B E q [o] = B D q. *Q. E. D.*

Prop. XXVIII.

Fig. 222.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B C, D), quas conjugatas appellamus, ducantur diametri conjugatæ (A C, B D), ut earum altera (AC) recta ſit, altera (B D) tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ (F K, L N) diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: Quadrata ex portionibus (L G, G N) lineæ æquidiſtantis rectæ diametro (A C), quæ inter linearum occurſum, & ſectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus (F G, G K) alterius lineæ, quæ tranſverſæ diametro (B D) æquidiſtant, inter ſectiones, & occurſum linearum interjectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

* 15. 5.
a *cor.* 19. 6.
b 21. 1. *bujus.*
c 12. 5.
d 6. 2.
e 15. 5.
f 9. 2.
g 11. 5.

Ordinatim applicentur F O, & L X. Eſtque A Fq. EBq :: * AC q. BDq [a] :: R. BD :: FOq (EHq). DO × OB [b] :: CX × X A. LXq (EMq) [c] :: A Eq + C X × X A + E Hq. E B q + D O × O B + E M q [d] (hoc eſt) :: X Eq + E Hq. O Eq + E Mq. [e] (hoc eſt) :: L Mq. + G Mq. F Hq + G Hq [e] :: 2 L Mq + 2 G Mq. 2 F Hq + 2 GHq [f](hoc eſt) :: L Gq + GNq. FGq + GKq [g] :: ACq. BDq. *Q. E. D.*

Lemma pro ſeq.

Fig. 223.

Sit linea recta compoſita $a + b + c + a$. Erit Quad. $a + b +$ Quad. $c + a = bb + cc + 2a \times : b + c + a$. hoc eſt $aa + bb + 2ba + cc + aa + 2ca = bb + cc + 2ba + 2ca + 2aa$.

Prop. XXIX.

Fig. 224.

Iiſdem poſitis, ſi linea (L N) rectæ diametro æquidiſtans, ſecet aſymptotos; quadrata ex ipſius portionibus (X G, G O), quæ inter linearum occurſum, & aſymptotos interjiciuntur, aſſumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus (F G, G K,) GK) lineæ (FK) quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, inter occurſum linearum, & ſectiones interjectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum tranſverſæ.

Nam ob LX [a] $= ON$, erit $LGq + GNq$ [b] $= XGq + GOq + 2LX \times XN$ [c] $(+ 2AEq)$. ergo $XGq + GOq + 2AEq$ $(+ \frac{1}{2}ACq)$. $FGq + GKq$ [d] $::$ $LGq + GNq$. $FGq + GKq$ [e] $::$ ACq. BDq. *Q. E. D.*

a 16.2. *hujus.*
b *lemm. præc.*
c 10.2. *hujus.*
d 7.5.
e 28. *hujus.*

Prop. XXX.

Fig. 225.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (AD, CD) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A, C) producatur linea (AC); per occurſum verò (D) ducatur linea (DL) æquidiſtans uni (FE), aſymptoton (FE, FG), ſectionémque & lineam tactus conjungentem ſecans, bifariam dividetur (in K).

Jungatur $FDBM$; ſitque $FH = FB$: ducantúrque BE, KN ad AC parallelæ. Eſtque DNq. NKq [a] $::$ $(FBq$. BEq [b] $::$ HB. R [c] $::)$ $HN \times NB$. NKq. [d] unde $HN \times NB = DNq$. [e] item $MF \times FD = FBq$. Ergo $DNq + MF \times FD$ [f] $= (HN \times NB + FBq$ [g] $=)$ FNq ergo $DN = NM$. [k] quare $DK = KL$. *Q. E. D.*

Coroll. FBq. BEq $::$ $HN \times NB$. NKq.

a 4. & 22.6.
b *cor.* 1. 2. *huj.*
c 21. 1. *hujus.*
d 9. 5.
e 37. 1. *hujus.*
f 2. *ax.* 1.
g 6. 2.
h *conv.* 6. 2.
k 2. 6.

Prop. XXXI.

Fig. 226.

Si quæ oppoſitas ſectiones contingunt duæ rectæ lineæ (AC, BC) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A, B) linea (AB) producatur; per occurſum verò (C) ducatur linea (CH) æquidiſtans aſymptoto (EF); quæ ſectionem, & lineam tactus conjungentem ſecet; linea (CH) inter occurſum, & eam quæ tactus conjungit interjecta à ſectione biſariam dividetur (in G).

Not. E *eſt centrum.*

Ducantur rectæ CED, & tam $EKMN$ & GX ad AB, quàm KF, GL ad CD parallelæ. Eſtque $NL \times LK$. LGq [a] $::$ $(EKq$. KFq [b] $::)$ MLq. LGq. [c] unde $NL \times LK = MLq$. [d] quare $MLq + KEq = (NL \times LK + KEq$ [e] $= LEq$ [f] $=)$ GXq. ergo cùm GXq. $MLq + KEq$ $::$ XCq. $LGq + KFq$; [h] erit $XCq = (LGq + KFq =)$ [k] $(EXq) + CE \times ED$. [l] ergo $CX = XD$; [m] adeoque $CG = GH$.

a *cor. præc.*
b 4. & 22. 6.
c 9. 5.
d 2. *ax.* 1.
e 6. 2.
f 34. 1. &c.
h 14. 5.
k 38. 1. *huj.*
l *conv.* 5. 2.
m 2. 6.

Prop. XXXII.

Fig. 227.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A F, C F) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A C) producatur linea (A C); per contingentium verò occurſum (C) ducatur linea (F K) tactus conjungenti (A C) æquidiſtans; & per punctum (H), quod conjungentem tactus (A C) bifariam ſecat, ducatur linea (H K) æquidiſtans aſymptoton alteri (D E): quæ (H K) inter dictum punctum (H), & lineam æquidiſtantem (F K) incerjicitur, à ſectione bifariam dividetur (in L).

a *cor.* 30. *huj.*
b 4 & 22. 6.
c 9. 5.
d 37. 1. *hujus.*
e 2. *ax.* 1.
f 6. 2.
g *Not.*
h 2. 6.
k 1. 2.
l 2. *ax.* 1.
m *priùs.*
n 2. 2.
o 3. *ax.* 1.
p *conſtr.*
q 3. 2.
r 1. *ax.* 1.
s 16. 6.
t 9. 5.
u *conſtr.*

Ducantur B E, L M ad A C parallelæ. Eſtque G M × M B. M Lq. [a] :: (D B q. B Eq [b] ::) H M q. M Lq. [c] unde G M × M B = H Mq. [d] Item H D × D F = D Bq. [e] ergo H Mq + H D × D F = (D Bq + G M × M B [f] =) D Mq. [g] ergo F M = M H. [h] & propterea K L = L H.

Not. Fiat D Z = M H. Eſtque M D × D F + M H × D F [k] = H D × D F. [l] ideóque (addendo utrique ipſum M H q) M D × D F + M H × D F + M H q = (H D × D F + M H q [m] = D Mq [n] =) M D × D F + M D × F M. ergo (ablato communi M D × D F) M D × F M [o] = M H × D F + M Hq [p] = D Z × D F + D Z q [q] = F Z × Z D [r] = M D × F M. [s] quare F Z. F M :: M D. Z D. & componendo Z M. F M :: Z M. Z D. unde F M [t] = (Z D [v] =) H M.

Prop. XXXIII.

Fig. 228.

Si, quæ oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (A G, D G), ſibi ipſis occurrant, & per tactus (A, D) linea (A D) producatur; per contingentium verò occurſum (G) ducatur linea (C F) æquidiſtans tactus conjungenti (A D); & per punctum (L), quod conjungentem tactus (A D) bifariam ſecat, ducatur linea (L N) æquidiſtans aſymptoton alteri (H K), convenienſque cum ſectione, & cum linea æquidiſtante (F C) per occurſum (G) ducta: quæ (L N) inter dictum punctum (L) & lineam æquidiſtantem (F N) interjicitur, à ſectione bifariam dividetur (in M).

a 4 & 22. 6.
b *cor.* 30. *huj.*
c 12. 5.
d 2. 6. 6. 2.
e 38. 1. *huj.*
f 34. 1. &c.
g 9. 5.
h *conv.* 5. 2.
k 2. 6.

Ducantur M P ad A D; & E K, M X ad G H parallelæ. Eſtque M Pq. P Lq [a] :: (H Eq. E Kq [b] :: E X × X B. X Mq [c] :: + H E q + E X × X B. E Kq + X Mq (hoc eſt) :: [d] H Xq (vel P Mq) [e] G H × H L + X Mq (vel) ::) [f] P Mq. G H × H L + H Pq. ergo P Lq [g] = G H × H L + H Pq. [h] quare L P = P G. & [k] conſequenter L M. = M N.

Prop. XXXIV.

Si in una (D C) aſymptoton (D C, D E) hpperbolæ, ſumatur aliquod punctum (C); ab eóque recta linea (C E) ſectionem contingat; & per tactum (B) ducatur æquidiſtans (F G) aſymptoto (D C); quæ (C G) per dictum punctum (C) tranſit, alteri (D E) aſymptoton æquidiſtans, à ſectione bifariam dividetur (in A.) Fig. 229.

Ducantur AH ad CD, & BK ad DE parallelæ; éſtque C B [a] = B E; [b] ideóque C K = K D. Item K B × K D [c] = C A × C D, [d] hoc eſt C G × C K = C A × C D. [e] quare C G. C A :: (C D. C K [f] ::) 2. 1. *Q. E. D.*

a 3. 2 *hujus.*
b 2, 6.
c 12. 2 *hujus.*
d *Sch.* 48. 1.
e 16. 6.
f *prius.*

Prop. XXXV.

Iiſdem poſitis, ſi à ſumpto puncto (C) ducatur recta linea (C F) ſectionem ſecans in duobus punctis (A, F); erit ut tota (F C) ad eam (C A), quæ extra ſumitur, ita inter ſeſe portiones (F L, L A) illius (F A), quæ intra ſectionem continetur. Fig. 230.

Ducantur C N X, K A V M, O P B R, Y F parallelæ ad D E; & A P S, T F R M X ad C D parallelæ. Eſtque A C [a] = F G; ac idcirco T G [b] = (K A [c] =) D S. & C K [b] = (T F [c] =) D Y. unde D K [d] = C Y. Item rectang H K. rectang K N [e] :: (D K. K C [f] :: C Y. K C [g] :: F C. C A [g] :: M K. K A :: [e] rectang M D. rectang A D (hoc eſt) [h] ::) rectang M D. rectang D B [k] (vel rectang O N) [l] :: rect. M D — rectang H K, rectang O N — rectang K N (hoc eſt) :: rect. M H. rectang K B :: [m] rectang M H. rect. A H (ob rectang K S [h] = rectang H O; & A B commune :: M V. V A [g] :: F L. L A [n] :: F C. C A. *Q. E. D.*

a 8. 2 *hujus.*
b 4. 6. & 14. 5.
c 34. 1.
d 2 *ax.* 1.
e 1. 6.
f 7. 5.
g 4. 6.
h 12. 2 *hujus.*
k 3. 2 *hujus.*
l 19. 5. (*et* 4. 6.
m 2 & 3. *ax.* 1.
n 11. 5.

Prop. XXXVI.

Iiſdem poſitis, ſi à puncto (G) ducta linea (H G) neque ſectionem in duobus punctis ſecet, neque æquidiſtans ſit aſymptoto (C E), ſed cum oppoſita ſectione conveniat (in A); erit ut tota (A K) ad lineam (K H), quæ inter ſectionem (H), & æquidiſtantem (K L) per tactum (B) interjicitur; ita quæ (A G) eſt inter oppoſitam ſectionem (A) & aſymptoton (C G) ad eam (G H), quæ inter aſymptoton (C G), & alteram ſectionem (H). Fig. 231.

Ducantur

a 1.6. Ducantur H M, A N ad C G parallelæ; & B X, G P, R H S N
b 4.6. parallelæ ad D E. Eſtque rectang N C. rectang C H [a]:: (N S. S H
c 7.5. :: [b]A G. G H [c]:: D H. G H. (ob A D = [d]G H) [b]:: C S. S G [a] :: rect
d 16.2. *hujus.* C R. rectang R G [e] :: rectang N C + rectang C R. rectang C H
e 12.6. [f](vel rectang L X [g] vel rectang B G) + rectang R G (hoc eſt) ::
f 12.2 *hujus.* rectang. N L. rectang R X (hoc eſt [h]::) rectang N L. rectang L H
g 3.2 hujus. & 4.6. :: [a]N R. R H :: [b]A K. K H :: [k]A G. G H. *Q. E. D.*
h *Not.* & 7.5. *Not.* Rectang R X = rectang LH. ob rectang X H [l] = rectang.
k 11.5.
l 12.2 *hujus.* M B. & commune rectang B H.

Prop. XXXVII.

Fig. 232. 233. 234. Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam, vel ſectiones oppoſitas, contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) ſibi ipſis occurrant, & per tactus (A, B) producatur linea (A B); à contingentium verò occurſu (C) ducatur linea (C F) ſectionem ſecans in duobus punctis (D, F); erit ut tota (F C) ad eam (C D) quæ extra ſumitur, ita portiones (F E, E D) inter ſeſe, quæ a linea (A B) tactus conjungente fiunt.

Ducantur diametri C H, A K; & rectæ D P, F R ad A C parallelæ, & L F M, N D O parallelæ ad A B.

a ~~4 & 22.6.~~ 19.5 Eſtque triang L M C. triang X O C :: [a] L Mq. X Oq [a]:: L Cq
b ~~49 & 51.1.~~ C Xq [a]:: F Cq. C Dq [a]:: F Mq. D Oq [a]:: triang F R M. triang D P O
2 & 11.3 *huj. et 2. ax.* 1 [a]:: triang L A K ([b]hoc eſt 4lat. L C R F). triang X A N ([b]hoc eſt
c 2. & 22.6. 4lat. X C P D) [a]:: L Aq. A Xq [c]:: F Eq. E Dq [d]:: F Cq. C Dq. [e]qua-
d 11.5. re F E. E D :: F C. C D. *Q. E. D.*
e 22.6. *Coroll.* L M. X O :: F E. E D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 235. 236. Iiſdem poſitis, Si per contingentium occurſum (C) ducatur recta linea (C O) æquidiſtans tactus conjungenti (A B); & per punctum (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (F O) ſecans, & ſectionem ipſam in duobus punctis (F, D), & lineam æquidiſtantem (C O) per occurſum ductam: erit ut tota (F O) ad eam (O D), quæ extra ſumitur inter ſectionem, & lineam æquidiſtantem; ita portiones (F E, E D) inter ſeſe, quæ à linea (A B) tactus conjungente efficiuntur.

a *cor. præc.* Ducantur L F K M, D H G X N parallelæ ad A B; ac F R, G P
b 4.6. ad F C parallelæ. Eſtque F E. E D [a] :: L M. X H [b]:: L C. C X [c]:: F O.
c 2.6. d 11.5. O D [d] :: F E. E D. *Q. E. D.*

Prop. XXXIX.

Si, quæ oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (AD, BD) Fig. 237.
ſibi ipſis occurrant, & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; à
contingentium verò occurſu (D) ducta linea (E G) & utramque ſe-
ctionem (E, F) & lineam (A B) tactus conjungentem ſecet (in G):
erit ut tota (E G) ad eam (F G), quæ extra ſumitur inter ſectionem
& conjungentem tactus; ita portiones (E D, D F) inter ſeſe, quæ
inter ſectiones (E, F), & contingentium occurſum (D) interjiciun-
tur.

Per centrum C ducatur A C K; & fiant E H S K, F N M X O
ad A B parallelæ, ac E P F R ad A B parallelæ. Eſtque E H. H D [a]::
F M. M D & H D. H S [a]:: M D. M X. unde ex æquo E H. H S :: a 4. 6.
F M. M X. [b] quare E Hq. F Mq [c] (id eſt triang E H P. triang b 16. 5. & 22. 6.
F M R) :: H Sq. M Xq [c] (hoc eſt triang D H S. D M X.) atqui tri-
ang E H P [d] = triang A S K + triang H D S. & triang F M R [d] = c 4. 6. & 22. 6.
triang. A X N + triang D M X. [e]quare triang H D S. triang DMX d 11. *hujus.*
([c]hoc eſt H Dq. D Mq [c] vel E Dq. D Fq) :: triang A S K. triang e 19. 5.
A X N [f] :: K Aq. A Nq. Eſt autem K A. A N :: E G. G F (Nam KA. f 22. 6.
A Q. [c]:: E G. G Q. & A Q. A N [c]:: G Q. G F; adeóque ex æ- g 11. 5.
quo K A. A N :: E G. G F). [g] ergo demum eſt E G. G F :: ED. DF.
Q. E D.

Not K A. A N :: E G. G F.

Prop. X L.

Iiſdem poſitis, ſi per contingentium occurſum (D) ducatur recta Fig. 238.
linea (F G) tactus conjungenti (A B) æquidiſtans; & à puncto (E),
quod conjungentem tactus biſariam dividit, ducatur linea (H L) ſe-
cans utramque ſectionem (in H, K) & æquidiſtantem (F G in L) ei,
quæ tactus conjungit: erit ut tota (H L) ad eam (L K), quæ extra
ſumitur, inter æquidiſtantem, & ſectionem, ita portiones (H E, E K)
inter ſeſe, quæ inter ſectiones, & conjungentem tactus interjiciuntur.

Ducantur A C X T; & parallelæ H N M X, K O P ad A B; & a 11. *hujus.*
H R, K S ad A D. Eſtque triang H R N. [a] (triang X M A + tri- b 4 & 22. 6.
ang M N D). triang K S O [a] (triang A Y P + triang P O D) [b] :: [b] c 4. 6.
H Nq. K Oq :: M Aq. A Pq (nam H N. K O [c] :: H E. E K [d] :: X A. d 34. 1. & 7. 5.
A Y :: [c] M A. A P) [b] :: triang X M A, triang YAP [e] :: triang M N D.
triang e 19. 5.

Digitized by Google

f *Not.* triang P O D [b] :: M Nq. P Oq [b] :: N Dq. D Oq [f] :: H Lq. L Kq [g] ::
g *ſupra, et* 11.5 H Eq. E Kq. [h] quare H L. L K :: H E. E K. *Q. E. D.*
h 22.6.
k 4.6.
l 34.7. & 7.5. *Not.* N D. D O :: H L. L K. Nam N D. D O [k] :: (M D. D P [l] :: H V. V K [k] ::) H L. L K.

Prop. XLI.

Fig. 239. 240. Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ (A E, C E, D F) inter ſe conveniant, in eandem proportionem ſecabuntur. (E D. D A :: C F. F E :: F B. B D).

a 29. 2. *hujus.*
b 35. 1. *huj.*
c 5. 2. *hujus.*
d 4. 6.
e 4. 6.

Ducatur A C, quam biſecet E G. Si hæc per tactum B tranſit, parallela, & [a] erit diameter. & [b] E B = B G. & D F ad A C [c] parallela. [d] Unde E D = D A. & E F = F G. [e] & D B = B F, quare liquet propoſitum.

* 46. 1. *huj.*
f 35. 1. *huj.*
g 2. 6.
h 7. 5.
k 15. 5.
l *conſtr.*
m *prius.*
n 2. 6.
o 4. 6.
p 15. 5.
q *prius* & 4. 6.

Sin per aliud punctum H tranſeat; per H ducatur tangens K H L ad A C parallela, & diameter M B X (per B) ad E G * parallela; & ordinatim applicentur A O, C P (ab A, & C). Eritque M B [f] = B P. ideóque M F [g] = F C. & E L [g] = L C (ob E H [f] = H G). unde F C. L C [h] :: (M F. E L [k] :: M C. E C) X C. G C. item L C. C E :: (1. 2 ::) G C. [l] C A. ergo ex æquali F C. C E :: X C. C A. quare inverſè dividendo F C. F E :: (C X. X A ::) E D. D A (nam K A. E A [m] :: 1. 2 :: B O. O N [n] :: D A. A N, & permutando K A. A D :: (E A. A N [o] ::) G A. A X. & E A. K A :: C A. G A. unde ex æquali E A. A D :: C A. A X. dividendóque E D. A D :: C X. X A).

Porro, C X. X A [o] :: C P. A O [p] :: $\frac{1}{2}$ C P. $\frac{1}{2}$ A O (hoc eſt) [q] :: B F. D B. ergo E D. A D :: B F. D B.

Prop. XLII.

Fig. 241. 242. 243. Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus; ab extremo diametri (A B) ducantur lineæ (A C, B D) æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt; & ducatur alia quæpiam linea (C E) quomodocunque contingens; abſcindet ex ipſis lineas (A C, B D) continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum (A B) conſtituitur.

a 16. 1. *huj.* Per centrum F ducatur F G H ad A C vel B D parallela. In hac eſt [a] diameter (puta F G) ipſi A B conjugata. Item per tactum E ducatur E L ad A C parallela; & E M parallela ad A B. Eſtque K F.

A F[b] :: A F. F L. unde (in hyperbole) KF. A F. [c] (KF + AF. AF + F L (hoc eſt) :: K A. A L. vel (in ellipſi) per converſam rationem, & permutando K F. A F (vel F B) :: K A. A L. [d] quare K B. (F B − K F. vel F B + K F) K F :: K L. (A L − K A vel A L + K A). K A. [e] hoc eſt B D. F H :: L E. A C. unde B D × A C [f] = (F H × L E [g] = F H × F M = [h] F Gq [k] =) $\frac{1}{4}$ T R [l] = B D × A C. Q. E. D.

b cor. 37. 1. h.
c 12. 5.
d inverſè & converſè. vel componendo.
e 4. 6.
f 16. 6.
g 34. 1.
h 38. 1. huj.
k cor. def. ad 16 1. hujus.
l 1. ax.

Prop. XLIII.

Si hyperbolen contingat recta linea (C H), abſcindet ex aſymptotis (D C, D E) ad ſectionis centrum (D) lineas (D C, D H) continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis (D F, DG) abſciſſis ab altera contingente (F G), ad ſectionis verticem (B), qui eſt ad axem (B D). Fig. 244.

Ducantur A K, B L ad D G; & A M, B N ad C D parallelæ. Eſtque C H [a] = 2 A H; & ideo C D [b] = 2 AM. & D H [b] = 2 AK. unde C D × D H [c] = (4 AK × A M [d] =) 4 B L × B N. Simili diſcurſu 4 B L × B N = F D × DG. [e] unde C D × D H = F D × DG. Q. E. D.

a 3. 2 hujus.
b 4. 6.
c Sch. 48. 1.
d 12. 2 hujus.
e 1, ax. 1.

Non aliter argumentabimur, etſi D B non ſit axis, ſed alia quæpiam diameter.

Prop. XLIV.

Si quæ hyperbolen, vel oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (C F, E G) occurrant aſymptotis (D C, D E); quæ (C E, G F) ad occurſus ducuntur, lineæ (A B) tactus (A, B) conjungenti æquidiſtantes erunt. Fig. 245. 246.

Nam ob C D × D F [a] = E D × D G, [b] erit C D. E D :: D G. D F. [c] quare C E, G F parallelæ ſunt. ergo H G. G E :: H F. F C. item GE. GB :: [d] 2. 1 :: FC. C A. ergo ex æquo H G. G B :: H F. F A. inverſéque G B. H G :: F A. H F. & diviſè H B. H G :: H A. H F. [c] quare G F, & A B parallelæ ſunt. Q. E. D.

a 43. hujus.
b 16. 6.
c 6. 6. &c.
d 3. 2. hujus.

Prop. XLV.

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremo axis (A B) lineæ (A C, B D) ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum (A F B, A G B) comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & ſectionibus oppoſitis excedat figurâ quadratâ, in ellipſi ve- Fig. 247. 248.

rò deficiat; & ducatur linea (E C) ſectionem contingens, occurrénſque eis (A C, B D) quæ ſunt ad rectos angulos; lineæ (C F, D G), quæ ab occurſibus (C, D) ducuntur ad puncta (F, G) ex eo comparatione factâ, angulos rectos (C F D, D G C) ad ea (F, G) efficient.

a 42. *hujus.* Nam A C × B D [a]= ($\frac{1}{4}$ TR [b]=) A F × F B. unde A C. A F [c]::
b *hyp.* F B. B D. item anguli C A F, F B D [b]recti ſunt. [d] ergo ang. A C F
c 16.6. = ang B F D. [d] & ang. A F C = ang. F D B. ergò cùm anguli
d 6.6. A C F, A F C [e] conficiant unum rectum, etiam anguli B F D, A F C
e 32.1. uni recto æquabuntur. unde (in ellipſi) reliquus D F C [f] rectus erit.
f 2 *cor.* 13.1. Simili diſcurſu angulus C G D rectus oſtendetur.

Prop. XLVI.

Fig. 249. Iiſdem poſitis, lineæ conjunctæ æquales facient angulos (A C F,
250. D C G, & C D F, B D G) ad contingentes (C D, B D).

a *præc. et* 31.3. Circulus enim diametro D C deſcriptus [a] per puncta F, G tranſibit.
b 21.3. unde ang. D C G [b]angulo D F G, [c]hoc eſt angulo A C F, æquatur.
c *in præced.* Similiter ang. C D F = ang. B D G. *Q. E. D.*

Prop. XLVII.

Fig. 251. Iiſdem poſitis, linea (H E) ab occurſu (H) conjunctarum (C G,
252. F D) perpendicularis eſt ad contingentem (C D).

Si negas, eſtò H L ad E C perpendicularis; & ordinatim applicetur
a 46. *hujus.* E M (ad B D parallela). Atque ob ang. G D B [a]= (ang. C D F
b 15.1. [b]=) ang. L D H. & [c] rectos D B G, D L H, erunt trigona G D B,
c *hyp.* D H L ſimilia. quare B D. D L [d]:: (G D. D H [d]:: F C. C H (ob ſimilia
d 4.6. trigona G D H, F C H; nam anguli [e] C F H, D G H recti
e 45. *hujus.* ſunt, & qui ad H æquales, vel communes) :: [d] A C. C L. (ob ſimilia
trigona C A F. C L H); nam & hîc ang. A C F [a]= ang. L C H. &
anguli F A C, C L H [c] recti ſunt). ergo permutando D L. C L ::
f 4.6. (B D. A C [f]:: B K. A K [g]:: B M. A M [h]::) D E. E C. ergo inverſè
g 36.1. *huj.* C L. D L :: E C. D E. & diviſè C D. D L :: C D. D E. quare
h 2. & 4.6. D L [k]= D E. [l] *Q. E. A.* Ergo H E potiùs eſt perpendicularis ad
k 9.5. E C. *Q. E. D.*
l 9. *ax.* 1.

Prop.

Prop. XLVIII.

Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt lineas (E F, E G), quæ à tactu du- Fig. 253.
cuntur ad puncta (F, G) ex comparatione facta, æquales continere 254.
angulos (C E F, G E D) ad contingentem (C D).

Circulus enim diametro D H deſcriptus [a] tranſit per puncta E G a 31.3.
[b](ob angulos D G H, DEH rectos) unde ang. D E G [c]= (ang DHG b 45. et 47. 6.
[d]= ang. C H F [c]=) ang. C E F. c 21.3.
d 15.1.

Not. In hyperbole anguli D H G, C HF ſunt idem angulus.

Prop. XLIX.

Iiſdem poſitis, ſi à punctorum aliquo (G) ad contingentem (C D) Fig. 255.
agatur perpendicularis (G H); quæ à facto puncto (H) ducuntur 256.
ad axis extrema (A, B) angulos rectos (A H B) continebunt.

Nam (ob angulos D B G, D H G [a] rectos) circulus ſuper diametro a hyp.
D G deſcriptus [b] tranſit per puncta B, H. unde ang. G H B [c] = ang. b 31.3.
B D G [d] = ang A G C [e] = ang A H C [f] = ang G H B. ergo (addito c 21.3.
communi angulo B H C, vel A H G) [g] erit ang. A H B = ang. C H G d 45. hujus.
[h] = rect. *Q. E. D.* e Not.
f 1. ax. 1.
g 2 ax. 1.
h hyp.

Not. ang. A G C = ang. A H C. Nam (ob [a] rectos angulos CAG,
C H G) circulus, diametro C G deſcriptus, [b] per puncta A, H tranſibit, in quo anguli A G C, A H C eidem arcui A C inſiſtent, & proinde [c] æquales erunt.

Prop. L.

Iiſdem poſitis, ſi à ſectionis centro (H) ducatur linea (H L) contin- Fig. 257.
genti occurrens, æquidiſtánſque lineæ (F E) per tactum (E) & per 258.
unum (F) punctorum ductæ; erit (H L) æqualis dimidio (H B) axis
(A B).

Junganturr EG, AL, LG, LB, ducatúrq; GM ad EF parallela. Eſtque a hyp.
(ob FH [a] = HG) EN [b] = N G; ideóq; E L [b] = LM. Item (ob ang. b 2.6.
DEG [c] = (ang C E F [d] =) ang E M G.) [e] Erit E G = G M. quare c 48. hujus.
ang. G L E [f] = ang. G L M. ergo G L ad E M eſt perpendicularis. d 29.1.
[g] ergo ang A L B eſt rectus. [h] ergo circulus diametro A B deſcrip- e 6.1.
tus tranſibit per L; & radius H L radio H A æquabitur. *Q. E. D.* f 8.1.
g 49. hujus.
h 31.3.

Prop. LI.

Fig. 259. Si in hyperbola, vel oppoſitis ſectionibus ad axem (A B) comparetur rectangulum (A D B, A E B) æquale quartæ parti figuræ, excedénſque figura quadrata; & à punctis (D, E) ex comparatione factis ad quamlibet ſectionem inclinentur rectæ lineæ (D F, E F); major (E F) minorem (D F) quantitate axis (A B) ſuperabit.

Recta F K H tangat ſectionem in F, & per centrum C ducatur G C H ad F D parallela. Eſtque ang. K H G[a] = (ang. K F D[b] =) ang G F H. unde G H[c] = (G F[d] =) G E (ob C D = C E). Item F D[e] = 2 G C. & C H[f] = C B (ideóque 2 C H = A B). [g] ergo E F (hoc eſt 2 G H) = (2 G C + 2 C H =) F D + A B. *Q. E. D.*

a 29. 1.
b 48. *hujus.*
c 6. 1.
d 2. 6.
e 4. 6.
f 50. *hujus.*
g. 1. *ax.* 1.

Prop. LII.

Fig. 260. Si in ellipſi ad majorem axem (A B) ex utraque parte comparetur rectangulum (A C B, A D B) æquale quartæ parti figuræ, deficiénſq; figurâ quadratâ; & à punctis (C, D) ex comparatione factis ad ſectionem inclinentur rectæ lineæ (C E, D E), ipſi axi (A B) æquales erunt.

Recta F E H tangat ſectionem, & per centrum G ducatur G K H ad C E parallela. Eſtque ang H E K[a] = (ang F E C[b] =) ang E H G. unde K H[c] = (K E[d] =) K D (ob G C[e] = G D). [g] ergo C E[h] (2 G K) + E D (2 K H) = 2 G H.[k] = 2 A G[e] = A B[g] = C E + E D.

â 48. *hujus.*
b 29. 1.
c 6. 1.
d 2. 6.
e *hyp.*
g 1. *ax.* 1.
h 4.
k 50. *hujus.*

Prop. LIII.

Fig. 261, 262. Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus ab extremo diametri (A C) ducantur lineæ (A D, C E) ordinatim applicatis æquidiſtantes; & à dictis terminis (A, C) ad idem ſectionis punctum (B) ductæ lineæ (A B, C B) ſecent æquidiſtantes (A D, C E); rectangulum ex abſciſſis (A D, C E) factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum (A C) conſtituitur.

Ordinatim applicetur B F. Eſtque A F . F B[a] (hoc eſt A C . C E) + C F . F B[a] (hoc eſt A C . A D)[b] = A F × C F . F Bq[c] :: T. R.[d] :: Tq. (A Cq). T R[e] = A C . C E + A C . A D[b] = A Cq . C E × A D. [f] ergo C E × A D = T R. *Q. E. D.*

a 4. 6.
b 23. 6.
c 21. 1. *huj.*
d 1. 6.
e 11. 5.
f 9. 5.

Prop. LIV.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam contiugentes duæ re- Fig. 263.
ctæ lineæ (A D, C D) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (C, A) ducantur contingentibus æquidiſtantes (C G, A F); à tactibus verò ad idem ſectionis punctum (H) ductæ lineæ (A H, C H) æquidiſtantes ſecent (in G, & F); rectangulum conſtans ex abſciſſis (A F, C G) ad quadratum lineæ (A C) tactus conjungentis, proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis (E B) lineæ (D E) ab occurſu (D) contingentium ad punctum (E) medium conjungentis tactus ductæ, quæ eſt intra ſectionem ad quadratum reliquæ (B D), & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus (A D, C D) factum, ad quartam partem quadrati lineæ (A C) tactus conjungentis.

Per H, B ducantur K H O X L, M B N ad A C parallelæ. Liquet a 32. 1.
M N ſectionem [a] tangere, & fore M B [b]= B N & K O [b]= O L. b ex. 4. 6.
(nam A E [c]= E C) item H O [d]= O X; [e] quare H K = X L. & c hyp.
[f]X K = L H. Hinc A Mq. M B × B N (M Bq) [g] :: A Kq. X K × K H d 46, & 47 1. hujus.
(L H × K H). & permutando A Mq. A Kq :: M B × B N. L H × e 3. ax. 1.
K H. [h] item N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. ergo ex æquali f 2. ax. 1.
N C × A M. M B × B N :: L C × A K. L H × K H [l] = L C. L H g 16. hujus.
[m](F A. A C) + A K. K H. [m] (G C. A C) [l] = F A × G C. A Cq [n] :: h Not. 1.
N C × A M. M B × B N [o] = N C × A M. N D × D M [p] (E Bq. l 23. 6.
B Dq) + N D × D M. M B × B N [q](C D × D A. A E × E C) m 4. 6.
[n] ergo F A × G C. A Cq = E Bq. B Dq + C D × D A. A E × E C. n 11. 5.
Q. E. D. o 5. def. 6. p Not. 2. q Not. 3.

Not. 1. N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. Nam (prop-
ter parallelas A C, K L, M N) eſt A M. A K [a] :: N C. L C. & per- a 2. 6.
mutando A M. N C :: A K. L C. [b] hoc eſt A Mq. A M × N C :: b 1. 6.
A Kq. A K × L C. & inversè.

Not. 2. N C × A M. N D × D M :: E Bq. B Dq. Nam A M
× C N. N D × D M. [c] = (A M. D M [d](E B. B D) + C N. N D c 23. 6.
[d](E B. B D) = E B. B D + E B. B D [d]=) E Bq. B Dq. d 2. 6.

Not. 3. N D × D M. M B × B N :: C D × D A. A E × E C.
Nam N D × D M. M B × B N [e]= (N D. B N [f](hoc eſt C D. E C) e 23. 6.
+ D M. M B [f](hoc eſt D A. A E) = C D. E C + D A. A E f 4. 6.
[e]=) C D × D A. E C × A E.

Prop.

Prop. LV.

Fig. 264. Si quæ oppoſitas ſectiones contingunt, rectæ lineæ (A G, DG) ſibi ipſis occurrant; & per occurſum (G) ducatur linea (C E) conjungenti tactus (A D) æquidiſtans; per tactus verò ducantur contingentibus æquidiſtantes (A M, D M); & à tactibus ad idem alterius ſectionis punctum (F) ducantur lineæ (A F, F A), quæ ſecent æquidiſtantes (DM, A M), rectangulum conſtans ex abſciſſis (A H, D N) ad quadratum lineæ (A D) tactus conjungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus (AG, D G) factum ad quadratum lineæ (C G) ab occurſu (G) ad ſectionem ducta, quæ quidem (C G) conjungenti tactus (D A) æquidiſtet.

* *Not.* 1. Per F ducatur F L K B ad A D parallela Eſtque EGq. *(vel CGq)
a 20. *hujus.* G Dq [a] :: B L × L F *(vel K F × L F). L Dq. item G Dq. G D ×
b *Not.* 2. G A :: L Dq. L D × A K. ex æquali igitur C Gq. G D × G A :: K F
c 23. 6. × L F. L D × A K [c] = K F. A K [d] (A D. D N) + L F. L D [d] (AD.
d 4. 6. A H) = A D. D N + A D. A H [d] = A Dq. D N × A H. ac inverſè G D × G A. C Gq :: D N × A H. A Dq. *Q. E. D.*

Not. 1. E G = C G. & L F = K B, vel K F = L B. Nam bi-
e 38. 2 *hujus.* ſectâ A D in O, [e] erit G O recta diameter, cui conjugata quæ ad AD
f *ex.* 4. 6. parallela. ergo C G = G E, & B P = P F. [f] item K P = P L. [g] er-
g 3. *ax.* 1. go K B = LF &c.

Not. 2. G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. Nam propter
h 4. 6 & *converſè.* parallelas A D, K L, erit G D. L D [h] :: GA. KA. & permutando G D. G A. [k] (hoc eſt G Dq. G D × GA) :: L D. K A [k] (hoc eſt) :: L Dq.
k 1. 6. L D × K A.

Prop. LVI.

Fig. 265. Si quæ unam oppoſitarum ſectionum contingunt, rectæ lineæ (AE, B E) ſibi ipſis occurrant; & per tactus (A, B) ducantur contingentibus æquidiſtantes (B N, A M); à tactibus verò ad idem alterius ſectionis punctum (C) ducantur lineæ (A C, BC), quæ æquidiſtantes (B N, A M) ſecent (in N, M): rectangulum conſtans ex abſciſſis (BN, A M) ad quadratum lineæ (A B) tactus conjungentis proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis (L D) lineæ, ad punctum L medium conjungentis tactus (A B) ductæ, quæ eſt inter dictum punctum (L), & alteram ſectionem (D) ad

qua-

Digitized by Google

quadratum ejus (D E), quæ inter ſectionem (D), & occurſum (E) interjicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus (AE, BE) factum ad quartam partem quadrati lineæ (A B) tactus conjungentis.

Ducantur C G K, D H F ad A B parallelæ. Eſtque B H q. H D q a *Not.* 1.
[a](H D × D F)[b] :: B Kq. P K × K C [a](C G × K C). item F A × B H. b 18. *hujus.*
B Hq [c] :: G A × B K. B Kq. ergo ex æquali F A × B H. H D × DF c *Not.* 2.
:: G A × B K. C G × K C. atqui F A × B H. H D × D F [d] = F A × d 5. *def.* 6.
B H. H E × E F [e](L Dq. D Eq) + H E × E F. H D × D F [f](A E × e *Not.* 3.
E B. A L × L B). [g] ergo L Dq × D Eq + A E × E B. A L × L B = f *Not.* 4.
G A × B K. C G × K C [h] = B K. K C [k](A M. A B) + G A. C G g 11. 5.
[k](NB. A B) = A M. A B + N B. A B [h] = A M × N B. A Bq. [g] = h 23. 6.
LDq. D Eq + A E × E B. A L × L B. *Q. E. D.* k 4. 6.

Not. 1. H D = D F. & P K = C G. Nam ob A L [l] = L B l. *hyp.*
[m] eſt H D = D F. [m] & K X = X G. item X C [n] = X P. [o] ergo PK = m *ex.* 4. 6.
C G. n 47. 1. *huj.*
o 2. *ax.* 1.

Not. 2. F A × B H. B Hq :: G A × B K. B Kq. Nam propter
parallelas B A, F H, G K; [p] erit F A. A G :: H B. B K. & permu- p *ex.* 2. *vel* 4. [illegible]
tando F A. H B [q](hoc eſt F A × H B. H Bq) :: A G. B K (hoc eſt q 1. 6.
A G × B K. B Kq).

Not. 3. F A × B H. H E × E F :: L Dq. D Eq. Nam F A × B H. r 23. 6.
H E × E F [r] = F A. E F [s](L D. D E) + B H. H E [s](L D. D E) s *ex.* 4. 6.
= L D. D E + L D. D E [r] = L Dq. D Eq.

Not. 4. H E × E F. H D × D F :: A E × E B. A L × L B. Nam t 23. 6.
H E × E F. H D × D F [t] = H E. H D [v](EB. B L) + E F. D F [u](E A. u 4. 6.
A L) = E B. B L + E A. A L [t] = E B × E A. B L × A L.

APOL-

APOLLONII

CONICORUM

LIB. IV.

Prop. I.

Fig. 266. SI in coni ſectione, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum (D) extrà ; atque ab eo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D C) ; una quidem (D B) contingens, altera verò (DC) in duobus punctis (E, C) ſecans ; & quam proportionem habet tota linea ſecans (C D) ad partem ſui ipſius (D C), quæ extrà ſumitur, inter punctum (D) & ſectionem interjecta ; in eandem dividatur, quæ (C E) eſt intra, ita ut rectæ lineæ ejuſdem rationis ad unum punctum conveniant (C D. D E :: C F. F E) ; quæ à tactu (B) ad diviſionem (F) ducitur, occurret ſectioni ; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum (D) extra ſumptum, ſectionem continget.

Eſt quaſi converſa 37æ 3ii.

a 49. 2. huj. Ex D[a] ducatur tangens D A, & connectatur A B, ſecans D C in
b 37. 3. hujus. G. ergo C G. G E[b] :: (C D. D E[c] ::) C F. F E. ergo componendo
c hyp. C E. G E[d] :: C E. F E. ergo G E = F E. ergo puncta G, F coinci-
d 9. 5. dunt. *Q.E.D.*

Coroll. B A ſecat D C in F.

Prop. II.

Hæc quidem communiter in omnibus ſectionibus demonſtrata ſunt ; at in ſola hyperbola ſi linea D B ſectionem contingat, & D C in punctis E, C ſecet, puncta verò E, C contineant tactum ad B, & punctum D ſit extra angulum aſymptotis comprehenſum, ſimiliter fiet de-

demonſtratio. * Poſſumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A, & quæ reliquæ ſunt ad demonſtrationem, perficere. * 49. 2. huj.

Prop. III.

Fig. 267.

Iiſdem exiſtentibus puncta E, C punctum B non contineant, ſitque punctum D intra angulum aſymptotis comprehenſum, poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ ſit D A, & reliqua ſimiliter demonſtrare.

Prop. IV.

Fig. 268.

Iiſdem poſitis, ſi occurſus E, C contineant tactum ad B; & punctum D ſit in angulo (L X N), qui deinceps eſt angulo (K X N) aſymptotis (K L, M N) comprehenſo; linea quæ à tactu (B) ad diviſionem (F) ducitur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur eandem ſectionem continget.

Ex D [a] ducatur DH tangens oppoſitam ſectionem, & connectatur HB, ſecans C E in G. [b] ergo C G. G E :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. & componendo C E. GE :: C E. F E. [d] ergo puncta G, F coincidunt. Q.E.D.

a 49. 2. huj.
b 37. 3. huj.
c hyp.
d 9. 5.

Coroll. H B ſecat D C in F.

Prop. V.

Fig. 269.

Iiſdem poſitis, ſi punctum D ſit in una (X N) aſymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem aſymptoto (X N) æquidiſtabit.

Nam per B ductâ B G ad X N parallelâ, erit rurſus C G. G E [a] :: (C D. D E [b] ::) C F. F E. ergo componendo, C E. G E :: C E. F E. [c] unde G, & F coincidunt.

a 35. 3. huj.
b hyp.
c 9. 5.

Prop. VI.

Fig. 270.

Si in hyperbola extra ſumatur aliquod punctum (D), à quo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D F); altera quidem (D B) contingens, altera verò (D F) æquidiſtans uni aſymptototon; & æquidiſtantis portio (E D) inter ſectionem & punctum (D) interjecta, æqualis ſit ei (E F), quæ intra ſectionem continetur: linea, quæ à tactu (B) ducitur ad factum punctum (F), occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum (D) ſectionem continget.

a *49.2. hujus.* Ponatur D intra angulum aſymptotis comprehenſum; ex D [a]du-
b *30. 3. hujus.* catur tangens D A, conjungatur B A, ſecans D F in G. ergo E G [b]=
c *hyp.* E D [c]= E F, quare puncta E, F coincidunt. *Q. E. D.*

Coroll. A B ſecat D E in F.

Prop. VII.

Fig. 271. Iiſdem poſitis, ſit punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur. Dico etiam ſic eadem evenire.

a *31. 3. huj.* Iterum, ex D ducatur tangens D H, & connectatur H B ſecans D F
b *hypoth.* in G. ergo E G [a]= E D [b]= E F. ergo non differunt puncta F, G.
Q. E. D.

Prop. VIII.

Fig. 272. Iiſdem poſitis, ſit punctum D in aſymptoton unâ (M N), & reliqua eadem fiant: dico lineam, quæ à tactu (B) ad extremam partem (F) ſumptæ (D F) ducitur, æquidiſtantem eſſe aſymptoto (M N), in qua eſt punctum D.

a *34. 3. huj.* Nam ducatur B G ad M N parallela, ergo rurſus E G [a]= (E D)
b *hyp.* [b]= E F. & puncta G, F coincidunt. *Q. E. D.*

Prop. IX.

Fig. 273. Si ab eodem puncto (D) ducantur duæ rectæ lineæ (D E, D F), quarum utraque coni ſectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis ſecet; & quam proportionem habent totæ lineæ (E D, F D) ad portiones (D H, D G), quæ extra ſumuntur, in eam dividantur, quæ ſunt intra (E H, F G); ita ut partes ejuſdem rationis ad idem punctum conveniant (E D. D H :: E K. K H. & F D. D G :: F L. L G), quæ per diviſiones (L, K) ducitur linea, ſectioni in duobus punctis occurret; & quam ab occurſu ad punctum (D) extra ſumptum ducuntur, ſectionem contingent.

a *49. 2. huj.* A puncto D [a]ducantur contingentes D A, D B; & conjungatur
b *cor. 1. 4. h.* A B. hæc [b]ſecat D E in K; [b] & D F in L. unde liquet propoſitum.

Prop.

Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in ſola hyperbola, ſi alia quidem eadem ſint, unius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius; & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum, eadem prorſus evenient, quæ dicta ſunt, ut in ſecundo theoremate tradidimus.

Prop. XI.

Iiſdem poſitis, ſi unius lineæ occurſus occurſus alterius non contineant, & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum, & figura, & demonſtratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Prop. XII.

Iiſdem poſitis, ſi unius lineæ (D F) occurſus (F, G) alterius (D E) Fig. 274.
occurſus (E, H) contineant; & ſumptum punctum (D) ſit in angulo (P R X) deinceps ei, qui aſymptotis (P O, N X) comprehenditur; linea per diviſiones (K L) ducta, ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum D, oppoſitas ſectiones contingent.

Ex D ducantur contingentes D M, D S; & connectatur M S: hæc [a] ſecat ipſam D E in K, ipſamque D F in L. unde liquet propoſitum. [a] *cor.4.4.huj.*

Prop. XIII.

Iiſdem poſitis, ſi punctum D ſit in una aſymptoton, & reliqua eadem exiſtant; quæ per diviſiones (K L) tranſit linea, aſymptoto (OP) in qua eſt punctum, æquidiſtabit; & producta occurret ſectioni; quæ verò ab occurſu ad punctum (D) ducitur, ſectionem continget. Fig. 275.

Itidem liquet ex 5^a hujus.

Prop. XIV.

Iiſdem poſitis, ſi punctum D ſit in una (P O) aſymptoton; & linea quidem D E ſectionem in duobus punctis ſecet; D G verò alteri aſymptoto (N X) æquidiſtans, ſecet in uno tantùm, quod ſit G; fiátq; ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipſi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L tranſit linea & aſymptoto (O D) æquidiſtabit, Fig. 276.

Digitized by Google

& ſectioni occurret: quæ verò ab occurſu (B) ducitur ad D, ſectionem continget.

a cor. 1. 15 4. huj.
b cor. 6. 4. huj.

Nam ductâ contingente D B, & per tactum B ductâ ad aſymptoton O P parallelâ; ſecabit hæc [a]ipſam D E in K, [b]ipſamque D G in L; unde liquet propoſitum.

Prop. XV.

Fig. 277.

Si in ſectionibus oppoſitis (A, B) inter duas ſectiones ſumatur aliquod punctum (D), & ab ipſo duæ lineæ ducantur; altera quidem (DF) contingens unam oppoſitarum, altera vero (A B) utramque ſecans; & quam proportionem habet linea (A D) inter ſectionem (A) quam non contingit, & punctum (D) interjecta ad lineam (D B), quæ eſt inter punctum & alteram ſectionem (B), eandem habaet linea quædam (A C) major eâ (A B), quæ inter ſectiones interjicitur, ad exceſſum ipſius (C B) in eadem recta, & ad eundem terminum (B) cum linea ejuſdem rationis; quæ à termino (C) majoris lineæ (A C) ad tactum (F) ducitur, occurret ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad ſumptum punctum (D), ſectionem continget.

a 49. 2 huj.
b 39. 3 huj.
c hypoth.
d 7. 5.

Ex D [a]ducatur tangens altera D E; & connectatur F E. Hæc ſecat A C in C; ſi negas, ſecet alibi in G. ergo erit A G.G B [b]:: (AD. D B [c]::) A C. C B. & dividendo A B. GB :: A B. C B. [d]unde G B = C B. ergo G, & C ſunt idem punctum.

Prop. XVI.

Fig. 278.

Iiſdem poſitis ſit punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad D, eandem ſectionem contingere.

a 49. 2 huj.
b 39. 3. huj.
c hyp.
d 7. 5.

Ducatur ex D tangens altera D E; & connectatur E F, ſecans A B in G. ergo A G. G B [b]:: (A D. D B [c]::) A C. C B. unde dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G B [d] = C B. ergo puncta C, G coincidunt. Q. E. D.

Prop. XVII.

Fig. 279.

Iiſdem poſitis ſit punctum D in una aſymptoton: dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, aſymptoto, in qua eſt punctum (D) æquidiſtare

Digitized by Google

Sit F G aſymptoto parallela. ergo rurſus A G. G B[a]:: (AD. DB[b]::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G , & C ſunt idem punctum.[c] *Q. E. D.*

a 36. 3 *huj.*
b *hyp.*
c *ut in præc.*

Prop. XVIII.

Si in ſectionibus oppoſitis ſumatur aliquod punctum (D) inter duas ſectiones, & ab ipſo ducantur duæ lineæ (A B, C H), utramque ſectionem ſecantes; & quam proportionem habent interjectæ (A D, C D) inter unam ſectionem, & punctum (D) ad eas, (D B, D H), quæ inter idem punctum (D) & alteram ſectionem interjiciuntur, eandem habent lineæ (A K, C G) majores iis (A B, C H), quæ ſunt inter ſectiones oppoſitas, ad exceſſus ipſarum (K B, G H); quæ per terminos (K, G) majorum linearum tranſeunt, occurrent ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad ſumptum punctum (D) ducuntur, ſectiones contingent. Ponatur D inter aſymptotos.

Fig. 280.

Per D[a] ducantur contingentes D E, D F, & connectatur E F; ſecat hæc[b] ipſam A B in K,[b] ipſamque C H in G. ergo liquet propoſitum.

a 49. 2 *huj.*
b 15. 4. *huj.*

Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur, ducantúrque rectæ lineæ (A B, C H) ſectiones ſecantes, & ut dictum eſt dividantur (in K, G): dico eam, quæ per K G producitur, occurrere utrique ſectionum, & quæ ab occurſibus ducuntur ad D, ſectiones contingere.

Fig 281

Rurſus enim per D[a] ducantur contingentes D E, D F;[b] ſecabit juncta F E ipſam A B in K, ipſámque C H in G. unde conſtat propoſitum.

a 49. 2. *huj.*
b 16. 4. *huj.*

Prop. XX.

Si ſumptum punctum (D) ſit in una aſymptoton, & reliqua eadem fiant; linea (KG), quæ tranſit per terminos (K,G) exceſſuum, aſymptoto, in qua eſt punctum (D) æquidiſtabit; & quæ à puncto (D) ducitur ad occurſum ſectionis, & lineæ (K G) per terminos tranſeuntis, ſectionem continget.

Fig. 282.

Nam pariter[a] ductâ tangente D F, ducta per tactum F ad aſymptoton parallela[b] ſecabit A B in K, & C H in G. ergo res conſtat.

a 49. 2 *huj.*
b 17. *hujus.*

Prop. XXI.

Fig. 283. Sint rurſus oppoſitæ ſectiones A, B, ſitque punctum D in una aſymptoton, & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans, linea verò C D H G utrique ſectioni occurrat; & ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ſit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G tranſit, occurrere ſectioni, aſymptotóque, in qua & punctum D, æquidiſtare; & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur, ſectionem contingere.

a ~~[illegible]~~ 5. 4. *hujus.*
b 17. *hujus.*

Ductâ enim tangente D F, & F G parallelâ aſymptoto (in qua D); ſecabit F G [a] ipſam D B in K, [b] ipſámque C H in G. unde conſtat.

Prop. XXII.

Fig. 284. Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotique, & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; linea verò C D H ſecet utraſque ſectiones, & D B alteri aſymptoto æquidiſtat; ſitque ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ponatur D K: dico lineam quæ per puncta K, G tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones eaſdem contingere.

Itidem patet ut in 6ta, & 16ta hujus libri.

Prop. XXIII.

Fig. 285. Sint itidem oppoſitæ ſectiones A B; punctúmque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; & linea quidem B D ſectionem B in uno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò D A ſimiliter ſecet ſectionem A, ſitque D B ipſi B G æqualis, & D A ipſi A K; dico lineam, quæ tranſit per K G occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad D ducuntur, ſectiones contingere.

Patet ut in ſexta.

Prop. XXIV.

Fig. 286. Coni ſectio (D A B C) coni ſectioni vel circuli circumferentiæ (E A B C) non occurrit, ita ut pars quidem eadem ſit, pars verò non communis.

Si affirmas, in parte communi ABC ſumatur punctum H utcunque,
& connectatur A H; & huic parallela ducatur D C; ipſámque A H
biſecet diameter B G F. Itaque (ob ſectionem E B C) [a] erit E F = a 46. & 47. 1.
F C. & (propter ſectionem D B C) D F [a] = F C. [b] proinde E F = b 1 ax. (huj.
D F. *Q. E. A.*

Prop. XXV.

Coni ſectio coni ſectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus Fig. 287.
punctis, quàm quatuor non ſecat.

Si fieri poteſt, ſecet quinque punctis A, B, C, D, E proximis: con-
jungantur rectæ A B, D C, quæ primò occurrant, (ut ſemper [a] fit in a 24. & 25. 2.
parabola & hyperbola) in L. [b] fiátque A L. L B :: A O. O B. [b] & *hujus.*
D L. L C :: D P. P C. jungatúrque O P, ſectionibus occurrens pun- b 10. 6.
ctis R, H. [c] ergo ductæ L R. L H ſectiones contingent: ducatur E L, c 9. 4 *hujus.*
ſectionibus occurrens in M, G. erítque E N. N M ([d] :: E L. L M) d 37. 3 *h.*
[e] $\sqsubset$ (E L. L G [d] ::) E N. N G. [f] unde N M $\sqsupset$ N G. [g] *Q. E. A.* e 8. 9.
f 10. 5.
Sin parallelæ ſint A B, D C (ut fieri poteſt in ellipſi & circulo), g 9. *ax.*
biſecentur ipſæ in O, & P; & connexa O P ſectionibus occurrat in Fig 288.
R, H. [h] quare R H eſt diameter, ad quam ordinatim applicantur A B, h 28. 1. *huj.*
D C; eíſque parallela E G (per E ducta). [k] unde erit utraque E G, k 10. *def.* 1. *h.*
E M biſecta in N. ac propterea N G = N M. *Q. E. A.* l 9. *ax.*

Prop. XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto (A) ſeſe contingant, Fig. 289.
non occurrant ſibi ipſis ad alia puncta Plura quam duo.

Si fieri poteſt, occurrant tribus punctis B, C, D proximè ſitis; [a] du-
catúrque tangens A L, occurrens ductæ B C in L; [b] fiat autem B L. a 49. 2. *huj.*
C L :: B P. P C; & connexa A P ſectionibus occurrat in H, & R. b 10. 6.
[c] ergo ductæ L H, L R contingent ſectiones: itaque ducta D L, ab- c 9 *hujus.*
ſurditatem incurremus, pariter ac in præcedenti. Sin B C, A L non
conveniant, (in ellipſi nempe, & circulo) ſimiliter conſequetur abſurdum.

Prop. XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis (A, B) ſeſe con- Fig. 290.
tingant, in alio puncto ſibi ipſis non occurrent. 291.

Occurrant, ſi fieri poteſt, in C; primò extra contactus. 292.

Du-

a 27.2 *hujus.*
b 10.*def.* 1.*b.*
c 9.*ax.*

Ducantur tangentes A L, B L, quæ ſi occurrant in L, ductâ C L, incurritur abſurditas, ut in 25ma. Sin tangentes parallelæ ſint, [a] erit quoque A B utriuſque ſectionis diameter, ac [b] idcirco N M [b]= (NC [b]=) N G. [c] *Q.E.A.*

d 29. 2. *huj.*

Sin punctum C ſit intra contactus, rurſus ducantur tangentes A L, B L, & connexa A B biſecetur in F, [d] eritque F L diameter; unde ſi ducatur C G M ad A B parallela, [b] erit utraque C G, C M biſecta in K; unde K G = K M. [c] *Q. E. A.*

Prop. XXVIII.

Fig. 293. Parabole (A G B) parabolen (A M B) non contingit, præterquam in uno puncto.

a 29. 2 *huj.*
b 35. 1 *huj.*
c 9. *ax.*

Si fieri poteſt, contingant ſe parabolæ punctis (A, B), à quibus ducantur tangentes A L, B L, concurrentes in L. junctámque A B biſecet recta L F. [a] hæc diameter erit utriuſque ſectionis; [b] unde L F biſecta eſt in G, & M. [c] *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Fig. 293. Parabole (A G B) hyperbolen (A M B) non contingit in duobus punctis, extra ipſam cadens.

a 29. 2 *huj.*
b 37. 1. *huj.*
c 19. 5.
d 14. 5.
e 35. 1. *huj.*
f 9. *ax.*

Tangat, ſi fieri poteſt, punctis A, B, à quibus ducantur tangentes A L, B L; junctámque A B biſecet recta L F; [a] hæc utriuſque ſectionis erit diameter. Sit D centrum hyperbolæ; erítque F D. D M [b]:: (D M. D L [c]::) F M. M L. quare, cùm F D $\sqsubset$ D M, [d] erit F M $\sqsubset$ M L. ergo F M $\sqsubset$ G L. atqui F G [e]= G L. ergo F M $\sqsubset$ F G. [f] *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 293. Parabola (A M B) ellipſin vel circuli circumferentiam (A G B) non contingit in duobus punctis (A, B) intra ipſam cadens.

a 37. 1 *huj.*
b 19. 5.
c 14. 5.
d 9. *ax.*

Si affirmas, ducantur tangentes A L, B L. & rectam A B iterum biſecet diameter F G, in qua ſit D centrum ellipſis, vel circuli. Eſtque L D. D G [a]:: (D G. D F [b]::) L G. G F. [c] ergo L G $\sqsubset$ G F. atqui F G = G L. quæ [d] repugnant.

Prop. XXXI.

Hyperbole (A G B) hyperbolen (A M B), idem centrum (D) habens, in duobus punctis (A, B) non continget. Fig. 293.

Si dicas contingere, ducantur contingentes A L, B L; & juncta DL a 30. 2. *huj.*
producatur: [a]biſecabit utique hæc tactus conjungentem A B, in F; b 37. 1. *h.*
eſtque (propter hyperbolen A G B) DGq [b] $= FD \times DL$. & (ob c 1. *ax.*
hyperbolen A M B) DMq [b] $= FD \times DL$. [c] quare $DGq = DMq$. d 9. *ax.*
[d] *Q. E. A.*

Prop. XXXII.

Si ellipſis (A M B) ellipſin, vel circuli circumferentiam, (A G B), habens idem centrum (D), in duobus punctis (A, B) contingat, linea (A B) conjungens tactus, per centrum (D) tranſibit. Fig. 294.

Nam ductis contingentibus A L, B L, ſiquidem A B per centrum a *hyp.*
[a]non tranſit, [b]hæ convenient, puta in L. eritque juncta L D [c] diameter b 27. 2 *huj.*
utriuſque ſectionis; & proinde in una, DGq [d] $= DL \times LF$; in al- c *cor.* 51. 1 *h.*
tera, DMq [d] $= DL \times LF$. [e] unde $DGq = DMq$. [f] *Q. E. A.* d 37. 1 *huj.*
e 1. *ax.*
f 9. *ax.*

Prop. XXXIII.

Coni ſectio, vel circuli circumferentia (A B C) coni ſectioni, vel circuli circumferentiæ (A D B E C), quæ non ad eaſdem partes connexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret. Fig. 295. 296.

Si fieri poteſt, occurrant tribus punctis A, B, C; liquetque rectas A B, C B continere angulum, ad partes in quibus ſunt concava lineæ (A B C). pariterque eædem angulum continent ad partes, in quibus concava lineæ A D B E C. ergo lineæ A B C, A D B E C concava habent ad eaſdem partes, contra hypotheſin.

Prop. XXXIV.

Si coni ſectio, vel circuli circumferentia (ABF) occurrat uni (ACF) oppoſitarum ſectionum in duobus punctis (A, F); & lineæ (A B F, A C F) quæ inter occurſum interjiciuntur ad eaſdem partes concava habeant; producta linea (A B F) ad occurſus, alteri (D) oppoſitarum ſectionum non occurret. Fig. 297.

a 33. 2 huj. Nam recta A F ſectioni D [a] non occurret, ergo nec ſectio A B F.

Prop. XXXV.

Fig. 298. Si coni ſectio, vel circuli circumferentia (A B C) occurrat uni (A) oppoſitarum ſectionum (A, B); non occurret ipſarum reliquæ (B) ad plura puncta, quàm duo (B, C).

Nam ut occurrat pluribus, repugnat 33æ hujus.

Prop. XXXVI.

Coni ſectio, vel circuli circumferentia oppoſitis ſectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

a 35. 4. huj. Etenim ſi uni occurrat, reliquæ ad plura puncta [a] non occurret, quàm duo.

Prop. XXXVII.

Fig. 299. Si coni ſectio, vel circuli circumferentia (C A D) unam oppoſitarum ſectionum (A) concavâ ſui parte contingat, alteri oppoſitarum (B) non occurret.

a 49. 2.
b cor. 32. 1. b.
c 33. 2. b.

Per contactum A [a] ducatur recta E F tangens, [b] utramque ſectionem. [c] hæc ſectioni B non occurret, ergo nec linea C A D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 300. Si coni ſectio, vel circuli circumferentia (A B C) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) contingat in uno puncto (A & B); oppoſitis ſectionibus in alio puncto non occurret.

a cor 32. 1. b.
b 33. 2.

Ducantur rectæ A D, B E contingentes ſectiones A, B; [a] hæ lineam A B C etiam contingunt. [b] ergo (incluſa his) linea A B C non occurret ſectionibus A, B.

Prop. XXXIX.

Fig. 301. Si hyperbole (A B C) oppoſitarum ſectionum uni (A B D) in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione ſita, quæ ipſi (A B C) opponitur ſectio (E), oppoſitarum alteri (F) non occurret.

Conjungatur A B ; [a] hæc neutri ſectionum E, F occurret. ergo a 33. 2 huj.
nec ipſæ E, F (quibus illa interjacet) ſibi occurrent.

Prop. XL.

Si hyperbole (A C B) utrique oppoſitarum ſectionum (A, B) occurrat ; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret. Fig. 302.

Si fieri poteſt, occurrat ſectioni A punctis D, E. [a] ergo recta D E a 33. 2 huj.
neutri ſectionum C, B occurret. Quare nec ipſæ ſectiones C, B convenient, contra hypotheſin.

Similiter, ſectio E non continget utramque A, B. Nam ducta tangens H E [a] neutri C, B occurret ; ergo nec ipſæ, itidem contra hypoth.

Prop. X L I.

Si hyperbola (C A B D) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) duobus punctis (C, A ; D, B) ſecet, convexa habens è regione ſita ; quæ ipſi opponitur ſectio (E F) nulli oppoſitarum (A, B) occurret. Fig. 303.

Sint K G L, M N G aſymptoti ſectionum A B, E F. liquet rectam
C A [a] occurrere aſymptoto L G ad partes K, (non ad L) ; & rectam
D B ad partes M, (non ad partes N,) [a] occurrere aſymptoto N G, a 8. 2 huj.
adeóque [b] angulum P H R continere angulum N G L, & propterea b 25. 2 huj.
ſectionem E F. Atqui C A [c] non occurrit ſectioni D B O, nec D B ſe- c 33. 2 huj.
ctioni C A X. ergo rectæ C A R, D B P ſectionibus C A X, & E F ;
ſectionibúſque D B O, & E F interjacent ; & proinde ſectio E F
neutri C A X, D B O occurret. *Q. E. D.*

Prop. X L I I.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis (A, B, C, D) ſecet, quæ ipſi opponitur ſectio (K), non occurret alteri oppoſitarum (E). Fig. 304.

Occurrat, ſi fieri poteſt, in K ; junctæque A B, D C [a] conveniant a 25. 2 huj.
productæ in L ; & [b] fiat A L. L B :: A P. P B. & D L. L C :: D R. b 10. 6.
R C. [c] ergo connexa P R ſectionibus occurret, [c] & quæ ab L ad occur- c 9. huj.
ſus ducuntur, ſectiones contingent ; [d] eritque proinde (ob ſectionem d 36. 1. huj. & 16. 5.
A F D) ~~F L. N L~~ :: N K. K L ; [d] & (propter ſectionem A M D) ~~N F.~~ NK e 11. 5.
KF L :: N M. M L. [e] quare ~~N K. K L~~ :: N M. M L. *Q. E. A.*
FN·FL FN·FLO 2

Prop.

Prop. XLIII.

Fig. 305. Si hyperbole (ACB) oppoſitarum ſectionum (A B, C) alteri (AB) in duobus punctis (A, B) occurrat, concava habens ad eaſdem partes; alteri verò (C) occurrat in uno puncto (C); quæ ipſi (A C B) opponitur ſectio (D), nulli oppoſitarum (AB, C) occurret.

a 33.2 *huj.* Conjungantur (AC, B C; [a] hæ non occurrent ſectioni D; &
b 34.4 *huj.* quoniam ſectioni A B occurrunt, [b] non ſecabunt alibi ſectionem C;
ergo ſectionem D continet ſectio C; unde liquet propoſitum.

Prop. XLIV.

Fig. 306. Si hyperbole (A M B C) uni (A B C) oppoſitarum ſectionum (A B C), D E F) occurrat in tribus punctis (A, B, C); quæ ipſi opponitur (D E K) alteri oppoſitarum (D E F) præterquam in uno puncto non occurret.

Si fieri poteſt, occurat punctis D, E; junganturque A B, D E;
a 36.2 *huj.* ſintque hæ primò parallelæ, & biſecentur rectâ G H; [a] eritque GH
b 48.1 *huj.* ſectionum diameter; ductâ igitur per C ipſi B A parallelâ C X, pro-
c 9. *ax.* ductáque H G ad N, [b] erit utraque C X, C O biſecta in N. [c] *Q.E.A.*

Fig. 307. Sin A B, D E conveniant in P, per C ducatur O C R ad A P paral-
lela, & protrahatur D P R. Biſecentur autem A B, D E punctis H,
G; per quæ ducantur diametri G S, H S; & rectæ I T, L T, M Y ſe-
a 5.2 *hujus.* ctiones contingant; [a] unde I T ad D P, & [a] L T ad A P, [a] & M Y ad
b 19.3. *huj.* O R (vel A P) erunt parallelæ. quare O R × R C. D R × R E [b] ::
c 9.5. (L T q. T I q [b] :: A P × P B. D P × P E [b] :: M Y q. Y I q [b] ::) X R ×
d 9. *ax.* R C. D R × R E. [c] unde O R × R C = X R × R C. [d] *Q. E. A.*

Prop. XLV.

Fig. 308. Si hyperbole (ABD) unam (D) oppoſitarum ſectionum (ABC, D) contingat, alteram verò (A B C) ſecet in duobus punctis (A, B); quæ ipſi opponitur ſectio (C E) nulli oppoſitarum (A B C, D) occurret.

Occurrant, ſi fieri poteſt, in C; jungatúrque A B F, cui occurrat
a *in* 25.2 *huj.* tangens DF; [a] erit occurſus F intra aſymptotos ſectionis ABD. ergo
c 33. *huj.* ducta CF cadit intra angulum B F D. atqui tangens D F [c] non oc-
currit ſectioni A B C. ergo C F extra ang. B F D cadit, quæ repugnant.

Prop. XLVI.

Si hyperbole (A G C) unam (A B C) oppoſitarum ſectionum (A B C, D) in uno puncto (A) contingat, & ſecet in duobus punctis (B, C), quæ ipſi opponitur ſectio (E) alteri oppoſitarum (D) non occurret. Fig. 309.

Si fieri poteſt, occurat in D; jungatúrque C B, cui occurrat tangens A F. [a] erit F intra aſymptotos: ducatur D F ſectiones ſecans in G, K. [b] ſitque C F. F B :: C L. L B; & connectatur A L M N. ergo ductæ F M, F N [c] ſectiones contingent; erítque [d] proinde X G. G F :: X D. D F (ob ſectionem A G M); & X K. K F :: X D. D F. (propter ſectionem A K N). [e] quare X G. G F :: X K. K F. *Q. E. A.*

a 25. 2.
b 10. 6.
c 1 *hujus.*
d 36. 1 *hujus.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLVII.

Si hyperbole (D A C) unam (A B C) oppoſitarum ſectionum (A B C, E F G) contingens, in alio puncto (C) ſecet; quæ ipſi D A C opponitur ſectio (E F H) alteri oppoſitarum (E F G) non occurret præterquam in uno puncto. Fig. 310.

Occurrat punctis E, F; jungatúrque E F. Sítque primò E F tangenti A K parallela; ergo quæ biſecat ipſam E F, [a] diameter per A tranſit; ſit hæc A L; pérque C ducatur C B ad A K parallela; [b] biſecta eſt igitur utraque B C, D C in L. [c] *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 48. 1. *huj.*
c 9. *ax.*

Sin E F, A K conveniant (in K); ideóque E F, B C (in N); biſecet diameter A M ipſam E F, ſectiones ſecans punctis X, O; per quæ ducantur contingentes X P, O R, [d] rectæ E F, ac proinde invicem parallelæ; erítque D N × N C. E N × N F [e] :: (A Pq. P Xq [f] :: A Rq. R Oq [e] ::) B N × N C. E N × N F: [g] quare D N × N C = B N × N C. [h] *Q. E. A.* Fig. 311.

d 34. 2 *huj.*
e 19. 3 *huj.*
f 4. & 22. 6.
g 9. 5.
h 9. *ax.*

Prop. XLVIII.

Si hyperbole (A C) unam (A B) oppoſitarum ſectionum (A B, D E G) in uno puncto (A) contingat; quæ ipſi (A C) opponitur ſectio (D E F) oppoſitarum alteri (D E G) non occurret ad plura puncta, quàm duo. Fig. 312. 313.

Si fieri poteſt, occurrat quoque in H; ducatúrque A K utramque ſectionem A B, A C contingens, & conjungatur D E, quæ primò parallela ſit ipſi A K. Biſecetur D E in L, & connectatur A L: [a] eſt hæc oppoſitarum diameter: ductâque H X G F ad D E parallelâ, erit X G [b] = (X H [b] =) X F. *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 10 *def* 1 *h.*
c 9. *ax.*

Sin D E non ſit ad A K parallela, occurrat ei in K, reliquiſque peractis ut priùs, producta F H ipſi A K occurrat in R. quare G R × RH.
d 19. 3. huj. R Aq [d]:: (D K × K E. A Kq ::) F R × R H. R Aq. [e] ideóque G R ×
e 9. 5. R H = F R × R H. [e] *Q. E. A.*

Prop: XLIX.

Fig. 314. Si hyperbole (A B) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) contingat, quæ ipſi opponitur ſectio (E), nulli oppoſitarum (A, B) occurret.

Ducantur enim A ~~D~~ C, B ~~G~~ C, quæ contingant ſectiones; [a] liquet has
a 25. 2. huj. intra aſymptotos ſectionis A B convenire. [b] ideóque aſymptotis ſecti-
b 33. 2. huj. onis E non occurrere, ſed eas continere, & multò magis ſectionem E. Cùm igitur tangens A C [b] non occurrat ſectioni B G, nec tangens B C [b] ſectioni A D, neutri harum occurret ſectio E. *Q. E. D.*

Prop. L.

Fig. 315. Si utraque oppoſitarum ſectionum (A, D) in uno puncto (A & D) contingant, ad eaſdem partes concava habens, in alio puncto non occurrent.

a 47. 4. huj. Si fieri poteſt, ſectiones D occurrant in E; ergo ſectiones A [a] non
b 39. 2. huj. occurrent præterquàm in uno puncto A. ducantur contingentes A H,
c 10. def. 1. b. D H, junctæque A D ſit parallela E B C; & per H ducatur H K diameter ſecunda ſectionum oppoſitarum; [a] biſecabit hæc ipſam A D in K, [c] ideóque utramque E B, E C in L. *Q. E. A.*

Prop. LI.

Fig. 316. Si hyperbole (A C B) oppoſitarum ſectionum unam (A D B) contingat in duobus punctis (A, B); quæ ipſi opponitur ſectio (F) oppoſitarum alteri (E) non occurret.

Si fieri poteſt, occurrat in E, ducantúrque ſectionum contingentes A G, B G; & connectantur A B, E G, & producta E G ſectionibus
a 36. 1. huj. occurrat in C, D, rectæque A B in H. Erit igitur H D. D G [a]::(H E.
b 14. 5. [illegible] E G [a]::) H C. C G. ergo quum H D $\sqsupset$ H C, [b] erit D G $\sqsupset$ C G.
c 9 ax. [c] *Q. E. A.*

Prop. LII.

Si hyperbole (A D) oppoſitarum ſectionum unam (A) contingat Fig. 317.
(in A), convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio (F)
oppoſitarum alteri (B) non occurret.

Ducatur enim A C tangens ſectiones; [a] hæc neutri ſectionum B,F a 33. 2 hujus.
occurret; ſed inter ipſas cadet; ergo nec ipſæ ſectiones occurrent.
Q. E. D.

Prop. LIII.

Oppoſitæ ſectiones (A B C D, E F) oppoſitas (A B, C D) non ſecant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Nam quum ſectiones convexa habent ſibi obverſa, ſi 1°, ſectio *1. Fig. 318.
A B C D * ſecet utramque A B, C D in quatuor punctis (A, B, C, D), a 41. hujus.
[a] liquet E F neutri reliquarum A B, C D occurrere.

Sin 2dò, ſectio A B C ſectionem A B * ſecet in duobus punctis (A, B,) *2. Fig. 319.
ipſáſque C D in uno E; non occurret ergo E F [b] ipſi C D; nec ipſi b 39. hujus.
A B præterquam uno puncto; (ſi enim duobus, [c] ergo ei oppoſita c. 41. hujus.
A B C non omnino occurret alteri C D, contra hypoth.)

Sin 3°, Sectio A B C ſectionem A B E ſecet punctis duobus A, B; 3. Fig. 320.
[d] non occurret ſectio E F ſectioni D, nec ſectioni A B E, præterquam d 35. hujus.
duobus punctis.

Sin 4°, Sectio A B C D utramque A B, E F unico puncto ſecet, 4. Fig. 321.
[e] nulli ipſarum occurret ipſa E F duobus punctis. e 40 hujus.

Sin Sectiones ad eaſdem partes concava habeant; & 5°, altera al- 5. Fig. 322.
teram in quatuor punctis (A, B, C, D) ſecet; [f] ſectio EF neutri A B, 323.
C D occurret. Sin 6°, Sectio A B C alteri occurrat tribus punctis, f 35. hujus.
[g] ipſa E F alteri in uno tantùm puncto occurret, idémque in reliquis. 6. Fig. 324.
Nullo igitur modo oppoſitæ ſectiones oppoſitis ad plura puncta con- g 44. hujus.
venient, quàm quatuor.

Prop. LIV.

Si oppoſitæ ſectiones (B C, E F) oppoſitas (A B, D) in uno pun- Fig. 325.
cto (B) contingant, non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura quàm
duo.

Habeant Sectiones convexa ſibi invicem obverſa, occurrátque primò a 39. hujus.
Sectio B C ipſi D duobus punctis, C, D. [a] ergo Sectio E F neutri [a] AB, b 52 hujus.
[b] C D occurret.

Sin 2ò, Sectio B C ſecet ipſam D ſemel in C, [c] ergo E F ſectioni Fig. 326.
D, nuſquam occurret, nec ipſi A B niſi in uno puncto (ſi enim duobus, c 52 hujus.
[d]non

d 39 hujus. [d] non occurret B C ipſi D) contra hypotheſin).

Fig. 327. Sin 3ò, Sectio B C non occurrat ſectioni D, [e] nec E F ipſi D occurret, [f] ipſique A B occurret duobus tantùm punctis.
e 52 hujus.
f 35. hujus. Sin Sectiones ad eaſdem partes concava habeant, ſimilis erit diſcurſus; conſtabitque omninò propoſitum.

Prop. L V.

Fig. 328. Si Sectiones oppoſitæ (A B, C D) oppoſitas (A C, E F) contingant in duobus punctis, in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

a 49. hujus. Contingant primò in A C. [a] ergo Sectio E F nulli ipſarum occurret.

b 51. hujus. Secundò, contingant in A, B; [b] itaque rurſus C D non occurret ipſi E F.
Fig. 329.

Fig. 330. Tertiò, contingat Sectio A C ipſam A B in A, & Sectio D ipſam E F in F. [c] ergo nec Sectio EF Sectioni A B, nec Sectio C A ipſi D F occurret.
c 52. hujus.

Fig. 331. Quartò, contingat A C ipſam A B in A, & E F ipſam D in E, habentes concava ad eaſdem partes, liquet ipſas neutiquam iu alio puncto occurrere: quare omnino conſtat propoſitum.
d 50 hujus.

LAUS DEO.

THEODOSII

SPHÆRICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott,*
in vico **Little-Britain.** 1675.

Digitized by Google

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SPHÆRA eſt figura ſolida comprehenſa una ſuperficie, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales.

Aliter in Elemento 11° definitur, à Semicirculi circumductu.

II

Centrum autem Sphæræ eſt ejuſmodi punctum.

III.

Axis verò Sphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque terminata in Sphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumvolvitur Sphæra.

IV.

Poli Sphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis.

V.

Polus Circuli in Sphæra, eſt punctum in ſuperficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes ſunt inter ſe æquales.

Ut ſi omnes rectæ P Z à puncto P ad circumferentiam circuli B Z A ductæ ſint æquales, erit P polus circuli B Z A: & inverſè ſi P ſit polus, erunt omnes P Z æquales inter ſe. Fig. 1.

VI.

In Sphæra æqualiter diſtare à centro ſphæræ circuli dicuntur, cùm perpendiculares quæ à centro ſphæræ in ipſorum plano ducuntur, ſunt æquales. Longiùs autem abeſſe ille dicitur, in cujus planum major perpendicularis cadit.

Prop. I. Theor.

Fig. 2. Si ſphærica ſuperficies (B A C) ſecetur aliquo plano (B C); linea (B G C F E), quæ fit in ſphæræ ſuperficie, eſt circumferentia circuli.

a 1. def. hujus. Nam primò tranſeat planum per ſphæræ centrum D: [a] liquet igi-
b hyp. tur rectas quaſcunque (D E, D F &c.) à D ad lineam B G C F E,
[b] hoc eſt è centro ſphæræ ad ejus ſuperficiem, eductas inter ſe æquari;
c 15. def. 1. [c] & proinde lineam B G C F E eſſe circuli circumferentiam.

Fig. 3. Sin planum non tranſeat per centrum ſphæræ, ab eo (D) [d] ducatur
d 12. 11. D H plano B C perpendicularis; & ab H ad lineam B G C F E du-
e 3. def. 11. cantur utcunque rectæ H E, H F, & connectantur D E, D F. Eritque
f 47. 1. (ob [e] ang. D H E, D H F rectos) $DHq + HEq$ [f] $= (DEq$ [g] $= DFq$
g 1. def. huj. $=)$ $DHq + HFq$. [h] quare $HE = HF$. Eodem modo rectæ om-
h 1 ax. 1. & 3. ax. 1. nes ab H ad lineam B G C F E eductæ æquantur: [k] ergo linea
k 15 def. 1. B G C F E eſt circumferentia circuli. *Q. E. D.*

Coroll. Idem eſt ſphæræ centrum & circuli, qui fit plano per ſphæræ centrum trajecto.

Centrum circuli, qui fit plano non per centrum ſphæræ trajecto, eſt in perpendiculari à centro ſphæræ in planum demiſsâ.

Prop. II. Probl.

Fig. 4: Datæ ſphæræ (B A D C) centrum reperire.

a 1 hujus: Data ſphæra ſecetur utcunque plano [a] facienti circulum B E D,
b 1. 3. [b] cujus centrum F; ab F [c] erigatur F A recta plano B D E, quæ ſphæ-
c 12. 11. ræ occurrat punctis A, C; biſecetur A C in G: erit G centrum
d 11. 11. ſphæræ. Si negas, eſto H centrum ſphæræ, [d] à quo ducatur H I re-
e 6. 11. cta plano B D E: [e] eſtque H I ipſi G F parallela; & punctum I eſt
f cor. 1 huj. centrum circuli B E D, ſed F ponebatur centrum: quæ repugnant.

Coroll. Si in ſphæra ſit circulus non per centrum ſphæræ tranſiens, ſphæræ centrum erit in rectâ è centro circuli ad ipſius planum perpendiculari.

Prop. III. Theor.

Fig. 5. Sphæra (A D B) planum (E F), à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis uno.

Tangat, ſi fieri poteſt, punctis A, B; & à ſphæræ centro C conjun-
a 1 hujus. gantur C A, C B; planum per C A, C B [a] facit in ſphæra circulum
A D B,

A D B, in plano tangenti [b] rectam E A B F: [c] hæc circulum A D B b 3. 11.
ſecat, & proinde ſphæram: ergo planum ſecat ſphæram, non tangit, c 2. 3.
contra hypotheſin.

Cor. Recta, quæ duo puncta in ſphæræ ſuperficie ſignata connectit, intra ſphæram cadit.

Prop. IV. Theor.

Si ſphæra (A C D E) tangat planum (A H K I L), quod eam non ſecet, recta linea (B A) ducta à ſphæræ centro (B) ad contactum (A), perpendicularis erit ad planum (A H K I L). Fig. 6.

Nam per B A ducantur utcunque duo plana, quæ faciant in ſphæra circulos A C D E, A F D G, in plano tangenti rectas H A I, K A L.
Et quia ſphæræ centrum B [a] eſt quoque centrum circulorum A C D E, a *cor.* 1. *huj.*
A F D G, & rectæ H I, K L tangunt hos circulos ([b] quippe non ſe- b *hyp.*
cant), [c] erit B A utrique H I, K L perpendicularis; ergo & plano c 18. 3.
per H I, K L ducto recta erit. *Q. E. D.* d 4. 11.

Prop. V. Theor.

Si ſphæra (A B C D) tangat planum (E F), quod ipſam non ſecet, à contactu autem (C) excitetur recta linea (C A) ad angulos rectos ipſi plano (E F), in lineâ excitatâ (C A) erit ſphæræ centrum. Fig. 7.

Si negas punctum G extra C A ſit centrum, jungatur C G: [a] er- a 4. *hujus.*
go C G plano E F recta eſt. [b] ergo C A eidem plano E F recta non b 13. 11.
eſt, contra hypotheſin.

Prop. VI. Theor.

Circulorum (A D, B C, E F), qui in ſphæra ſunt, maximi ſunt, qui per ſphæræ centrum (G) ducuntur (A D); aliorum verò (B C, E F) illi inter ſe æquales ſunt, qui æqualiter à centro (G) diſtant; qui verò longiùs à centro diſtant, minores ſunt: & circuli in ſphæra maximi per ſphæræ centrum tranſeunt; aliorum autem æquales à centro æqualiter diſtant, minores verò longiùs à centro diſtant. Fig. 8.

Ducantur G H recta circulo B C, & G I recta circulo E F; & connectantur G D, G C, G E.

1. G C recto angulo G H C oppoſita [a] major eſt quàm C H; hoc a 47. 1.
eſt radius circuli A D major eſt radio circuli B C: ergo circulus A D
major eſt circulo B C.

Digitized by Google

2 & 3. $GHq + HCq \overset{a}{=} (GCq = GEq) \overset{a}{=} GIq + IEq$. ergo ſi $GH = GI$, erit $HC = IE$; & proinde circulus BC æqualis circulo EF: ſin $GH \sqsubset GI$, erit $HC \sqsupset IE$, & propterea circulus BC minor circulo EF.

4. Si circulus maximus AD per centrum non tranſeat, alius tranſeat, is ergo (ut modò oſtenſum eſt) circulo AD major erit, contra hyyothesin.

5. & 6. Ob $GHq + HCq = GIq + IEq$; ſi $HC = IE$, erit $GH = GI$: ſin $HC \sqsupset IE$, erit $GH \sqsubset GI$.

Prop. VII. Theor.

Fig. 9. Si in ſphæra (B A C) ſit circulus (B F C G), à ſphæræ autem centro (D) ad circuli centrum (E) connectatur recta linea (D E), connexa linea (D E) ad planum circuli (B F C G) recta erit.

Ducantur B C, G F diametri circuli B F C G, utcunque & connectantur D B, D C, D F, D G. Quoniam trigona D E B, D E C ſibi mutuò æquilatera ſunt (quippe $DB = DC$; $EB = EC$, & DE commune eſt) [a] erunt anguli D E B, D E C pares, & proinde recti. Simili diſcurſu anguli D E F, D E G recti erunt. [b] ergo D E recta eſt plano B F C G. *Q. E. D.*

a 8. 1.
b 4. 11.

Prop. VIII. Theor.

Fig. 10. Si in ſphæra (B A D C) ſit circulus (B G D H), & à ſphæræ centro (E) ad circulum (B G D H) ducatur perpendicularis (E F), quæ ad utramque partem producatur, cadet ea in ipſius circuli polos (A, C).

Ducantur utcunque diametri B D, G H, & connectantur A B, A D, A H, A G. Quoniam radii F B, F D, F G, F H pares ſunt, [a] & anguli A F B, A F D, A F G, A F H recti, [b] erunt ſubtenſæ A B, A D, A G, A H æquales. [c] ergo A eſt polus circuli B G D H. Similique argumento C oſtendetur ejuſdem polus. *Q. E. D.*

a 3. def. 11.
b 4. 1.
c 5. def. huj.

Prop. IX. Theor.

Fig. 10. Si ſit in ſphæra (B A D C) circulus (B G D H) & ab altero (A) polorum ejus in ipſum ducatur perpendicularis recta linea (A F C), cadet hæc in circuli centrum (F), & inde producta cadet in reliquum polum ipſius circuli.

Nam per F ducantur rectæ B D, G H utcunque, & connectantur A B, A D, A G, A H. Et quoniam rectæ A B, A D, A G, A H [a] pares ſunt, & anguli A F B, A F D, A F G, A F H [b] recti, [c] erunt rectæ F B, F D, F G, F H æquales. [d] ergo F eſt centrum circuli BGDH. [e] Item quia centrum ſphæræ eſt in recta A F C, erit C ejuſdem circuli alter polus. *Q. E. D.*

a 5. *def. huj.*
b 3. *def.* 11.
c 47. 1.
d 9. 3.
e 6. *hujus.*

Prop. X. *Theor.*

Si ſit in ſphæra circulus (B G D H); linea recta (A C) per ejus polos (A, C) ducta, ad circulum (B G D H) recta eſt, tranſitque per centrum circuli (F), & ſphæræ (E).

Fig. 11.

Fiat, ut in præcedenti, & connectantur rectæ C B, C D, C G, C H. Et quoniam trigona C A B, C A D, C A G, C A H ſibi mutuò [a] æquilatera ſunt, [b] erunt anguli C A B, C A D, C A G, C A H pares. [c] Ergo cùm rectæ F B, F D, F G, F H, tùm anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur. [d] quare A F recta eſt circulo B G D H, [e] & F eſt centrum ejus, & [f] proinde etiam centrum ſphæræ eſt in A F. Quæ *E. D.*

a 5. *def. huj.*
b 8. 1.
c 4. 1.
d 4. 11.
e 9. *hujus:*
f *cor.* 2. *huj.*

Schol. 1. *Theor.*

Si in ſphæra ſit circulus (B G D H), & ab altero (A) polorum ejus per ſphæræ centrum (E) ducatur recta (A E F C) erit hæc ad circuli planum perpendicularis, & producta cadet in centrum ipſius, & in reliquum polum.

Fig. 12.

Fiat, ut priùs, & connectantur E B, E D, E G, E H: & quia trigona A E B, A E D, A E G, A E H ſibi mutuò æquilatera ſunt, [a] erunt anguli E A B, E A D, E A G, E A H pares; [b] ergo cùm rectæ F B, F D, F G, F H, tum anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur; [c] quare A F recta eſt circulo B G D H, [d] & F eſt centrum ejuſdem, & C alter polus. *Q. E. D.*

a 8. 1.
b 4. 1.
c 4. 11.
d 9. *hujus.*

Schol. 2. *Theor.*

Si in ſphæra ſit circulus (B G D H), & à centro ſphæræ (E) per centrum circuli (F) ducatur recta linea (A E F C), cadet hæc in utrumque polum circuli (B G D H).

Nam recta E F [a] perpendicularis eſt plano circuli B G D H. [b] ergo utrinque protracta cadet in polos circuli. *Q. E. D.*

a *hyp* & 7. *h.*
b 8. *huj.*

Digitized by Google

Corollarium ex his.

Quatuor puncta; centrum circuli, poli ejuſdem, & centrum ſphæræ in una recta exiſtunt, in diametro ſcilicet ſphæræ ad circuli planum rectâ.

Prop. XI. Theor.

Fig. 12. In ſphæra (A B C D) maximi circuli (A C, B D) ſe mutuò ſecant bifariam.

a 6. hujus. *b 3. 11.* Commune enim centrum circulorum ([a] hoc eſt ſphæræ centrum) eſto G; erit hoc in communi ſectione [b] recta E F: ergo recta E F eſt diameter, utrumque circulum biſecans. *Q. E. D.*

Coroll. Interſectio duorum circulorum in ſphæra maximorum eſt diameter ſphæræ.

Prop. XII. Theor.

In ſphæra (A B C D) circuli (A C, B D), qui ſe mutuò biſecant, ſunt maximi.

Communis circulorum ſectio E F biſecetur in G; erit G centrum commune circulorum (quoniam E F diameter), quin & ſphæræ: nam ex G erigatur GH perpendicularis circulo AC, & G B recta circulo BD; *a cor. 1. huj.* [a] eritque centrum ſphæræ in utraq; GH, GI; ergo in communi puncto G. ergo cùm circuli A C, B D per centrum ſphæræ tranſeant, *b 6. huj.* [b] erunt maximi circuli. *Q. E. D.*

Prop. XIII. Theor.

Fig. 13. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) circulum quempiam (B E D) ad rectos angulos ſecet, & bifariam ſecat eum, & per polos (A, C).

Ab F centro ſphæræ (ſeu circuli maximi A B C D) ducatur F G recta circulo B E D, [a] quæ communi circulorum ſectioni B D occurret in G. *a 38. 11.* *b cor. 1. huj.* *c 8. hujus.* [b] eritque G centrum circuli B E D; ergo B D eſt diameter circuli B E D, ipſum biſecans; [c] & ipſius poli ſunt in F G protracta; ergo in circulo A B C D. *Q. E. D.*

Valet hæc Propoſitio, nec non 8, 9, 10 cum ipſarum Scholiis, etiam quando circulus B D maximus eſt, & tranſit per centrum ſphæræ.

Coroll. Hinc, ſi circulus maximus alterum non biſecet, neque per ejus polos tranſeat, is huic obliquus eſt.

Prop.

Prop. XIV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) circulum non maximum (B E D) biſecat, ad angulos rectos eum ſecat, & per polos.

Biſecetur ſectio B D in G, & à ſphæræ centro F connectatur F G. Et quia B D [a] eſt diameter circuli B E D, erit G ejus centrum. [b] ergo F G recta eſt circulo B E D, & producta [c] cadet in ejuſdem polos; proinde poli ejus ſunt in circulo A B C D. Quæ *E. D.*

a *hyp.*
b 7 *hujus.*
c 8 *hujus.*

Prop. XV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) eorum, qui in ſphæra ſunt, circulorum aliquem (B E D) ſecet per polos (A, C); ſecabit eum biſariam, & ad angulos rectos. Fig. 13.

Nam ducta recta A C [a] recta eſt circulo B E D, & per centra circulorum F, G tranſit. quare 1°, circulus A B C D [b] rectus eſt circulo B E D; & 2°, communis circulorum ſectio B D eſt diameter circuli B E D, ipſúmque biſecat. Quæ *E. D.*

a 10 *huj.*
b 18. 11.

Schol. 1. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tranſeat per polos (A, C) alterius cujuſpiam maximi circuli (B D); tranſibit viciſſim hic (B D) per illius (A C) polos (B, D). Fig. 14.

Nam circulus A B C D circulum B D [a] perpendiculariter ſecat; ergo viciſſim circulus B D circulum A B C D ſecat perpendiculariter, [b] adeóque per polos ipſius. *Q. E. D.*

a 15 *hujus.*
b 13 *hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) per polos (A, C) ſecet, circulus (A B C D) maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos.

Nam recta A C [a] tranſit per centrum ſphæræ, [b] ergo circulus A B C D eſt maximus; [c] biſecátque circulum B D, eidémque rectus eſt. Quæ *E. D.*

a 10 *hujus.*
b 6 *hujus.*
c 15 *hujus.*

Schol. 3. Theor.

Vide fig. Prop. præc. Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) biſariam, & ad rectos ſecet angulos, circulus (A B C D) maximus eſt, cúmque ſecat per polos.

Nam biſectâ communi circulorum ſectione B D in G, erit G centrum circuli B D: in plano circuli A B C D ducatur G A ad B D
a *4. def. 11.* perpendicularis; [a] erit G A plano B D recta; [b] ergo G A tranſit
b *Sch. 2. 10 b.* per polos circuli B D. [c] ergo circulus A B C D per ipſius B D polos
c *Sch. 2. 15 b.* tranſit, maximúſque proinde exiſtit. Quæ *E. D.*

Schol. 4. Theor.

Si in ſphæra ſit circulus (B D), & à polorum ejus altero (A) cadens recta (A G), ipſius plano perpendicularis, æquetur ejus ſemidiametro, circulus (B D) maximus eſt.

a *9 hujus.* Nam G [a] eſt centrum circuli B D, & centrum ſphæræ eſt in rectâ
A G, & alter polus C in eâdem protractâ: ergo circulus per A C eſt
maximus. Eſto is A B C D ſecans circulum B D punctis B, D: &
b *3 def. 11.* connectatur G D. Cùm igitur angulus A G D [b] rectus ſit (quoniam
A G plano B D ponitur recta) erit A G. G D :: G D. G C. atqui
G D = A G. ergo G C = (G D =) A G. ergo cùm centrum
c *6 hujus.* ſphæræ ſit in A G, erit G centrum ſphæræ. [c] ergo circulus D B eſt
maximus. *Q. E. D.*

Prop. XVI. Theor.

Fig. 15. Si ſit in ſphæra maximus circulus (A B), recta linea (C B), ducta ab ejuſdem circuli polo (C) ad circumferentiam, æqualis eſt lateri quadrati inſcripti maximo circulo.

a *9 hujus.* Nam demiſſâ C E rectâ circulo A B, [a] erit E centrum circuli A B,
b *6 hujus.* ipſiúſque ſphæræ; ([b]quare circulus A C B D eſt maximus), & anguli ad centrum E recti; ideóque ſinguli arcus C A, C B, A D, B D ſunt quadrantes: quare ſubtenſa C B eſt latus quadrati maximo circulo A C B D inſcripti. *Q. E. D.*

Schol.

Si in ſphæra ſit circulus (A B), & ab ejus polo (C) ad circumferentiam ducta recta (C B) æquetur lateri quadrati in eo deſcripti, circulus ipſe (A B) maximus eſt.

Ducatur C E recta circulo A B; [a]ergo E eſt centrum circuli AB; & C E [b] perpendicularis eſt radio E B. ergo C Eq + B Eq [c] = C Bq = 2 B Eq. quare C E = B E. [d] ergo circulus A B eſt maximus.

a 9 *hujus.*
b 3 *def.* 11.
c 47. 1.
d *ſch.* 4.15. *h.*

Prop. XVII. Theor.

Si in ſphæra ſit circulus (A B), à cujus polo (C) in ipſius circumferentiam ducta recta linea (C B) æquetur lateri quadrati inſcripti maximo circulo (C A B D), ipſe circulus (A B) maximus erit.

Circulus enim C A D B, tranſiens per E centrum ſphæræ, & rectam C B, eſt maximus; cujus arcus C B eſt quadrans; eique par C A etiam quadrans (ob rectam C A = C B); proinde ſectio A B erit diameter circuli C A D B. eadémque A B diameter eſt circuli A B ([a]hunc enim biſecat;) ergo circulus A B eſt maximus. *Q.E.D.*

a 15 *hujus.*

Prop. XVIII. Probl.

Lineam rectam deſcribere æqualem diametro (A C) circuli cujuſlibet (A B C D) in ſphæra dati.

Fig. 16. 17.

In peripheria circuli A B C D ſume tria quælibet puncta A, B, D, junctiſque rectis A B, A D, B D, [a] fac triangulum E F G triangulo A B D æquilaterum; & duc F H ad E F, & G H ad E G perpendiculares, concurrentes in H; & connectatur E H. Erit E H = A C. Ducatur C D: atque ob ang. E F H + ang E G H [b] = 2 rect. [c] erit ang F E G + ang F H G = 2 rect. [d] ergo quadrilaterum E F H G circulo inſcribi poteſt; quare ang E H G [c] = (ang E F G [d] = ang A B D [e] =) ang A C D. item ang H G E [b] = (rect [c] =) ang CDA; & [b] latus E G = A D; [f] ergo E H = A C. *Q. E. F.*

a 22. 1.
b *conſt.*
c *cor.* 32. 1.
d *cor.* 22. 3.
c 27. 3.
d 8. 1.
e 3. 1.
f 26. 1.

Scholium. Theor.

Fig. 18.

Linea recta (A E) à polo (A) cujuſvis circuli (B C), in ſphæra, ad ſphæræ ſuperficiem ducta, quæ ſit æqualis lineæ rectæ (A B) ab eodem polo ad ſuperficiem circuli (B C) ductæ, in circuli (B C) circumferentiam cadet.

Not. hoc ſcholium prop. 19. ſubnectendum eſt.

Si negas; per A E ducatur circulus maximus A B E C, occurrens circulo B C punctis B, C; ergo ducta A B [a] = (A D [b] =) A E: [c] proinde arc. A B = arc. A E, contra 9. *ax.* 1.

a 5 *def. huj.*
b *hyp.*
c 28. 3.

Digitized by Google

Prop. XIX. probl.

Fig. 19. 20. Deſcribere lineam rectam (E H) æqualem diametro (A C) datæ ſphæræ.

a 18. *hujus.*

In ſuperficie datæ ſphæræ ſume duo puncta A, B pro libitu tuo. Polo A intervallo A B deſcribatur circulus B Z D, cujus diametro B D [a] fac æqualem F G; & ſuper F G fac triangulum F E G triangulo B A D æquilaterum; ipſiſque E F, E G duc perpendiculares F H, G H convenientes in H: erit ducta E H æqualis diametro ſphæræ.

Nam per A B, A C deſcribatur maximus circulus ſecans circulum B Z D in B, D; eritque ut in præcedenti E H = A C.

Prop. XX. Probl.

Fig. 21. Per duo data puncta (A, B) in ſphærica ſuperficie deſcribere circulum maximum.

a 17. *hujus.*

Deſcribatur polo A, intervallo A G, latere quadrati maximo circulo inſcripti, circulus C D; & polo B, pari intervallo B G, deſcribatur circulus E F priori occurrens in G. Itaque circulus polo G intervallo G A tranſibit per B (quia G A = G B), eritque maximus ([a]quia G A æquatur lateri quadrati maximo circulo inſcripti). *Q. E. F.*

Si puncta A B opponantur ex diametro ſphæræ, liquet circulos quoſcunque per illa deſcriptos fore maximos.

Prop. XXI.

Fig. 22. 23. Cujuſlibet circuli (A B) in ſphæra dati polum invenire.

a 14. *hujus.*

1. Sit primò datus circulus A B non maximus; ſume in ejus peripheria duo quælibet puncta C, D; biſeca verò arcum C A D in A, & arcum C B D in D; unde arc. A C B = arc. A D B; itaque ſi per puncta A, B ducatur circulus maximus A E B F, [a] erit in hoc polus circuli A C B; quare biſecto arcu A E B in E, erit E polus circuli A C B. *Q. E. F.*

2. Sin datus circulus A B ſit maximus, biſeca ſemicirculum A G B in G; polóque A, ſpatio G A (vel G B) duc circulum A E B F, biſectóque arcu A F B in F, erit F polus circuli A C B D. *Q. E. F.*

Schol. 1. *Theor.*

Fig. 24. Si in ſuperficie ſphæræ acceptum fuerit aliquod punctum (A), & ab eo puncto ad circumferentiam circuli cujuſpiam (B C) in ſphæra dati, cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales (A D, A E, A F); acceptum punctum (A) polus eſt ipſius circuli (B C).

Ex A ducatur A G recta circulo B C, & connectantur G D, G E, G F.

Ob angulos A G D, A G E, A G F rectos; & rectas A D, A E, A F pares, [a]erunt G D, G E, G F etiam pares; quare G eſt centrum circuli B C; atque inde A erit ejuſdem polus. *Q. E. D.* a 47. 1 b 8 *hujus.*

Schol. 2. *Theor.*

Fig. 25. In ſphæra circuli (B F, C E), à quorum polis (A, D) rectæ (A F, D E) ad eorum circumferentias ductæ ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt: & circulorum æqualium (B F, C E) æquales ſunt rectæ (A F, D E) ab eorum polis (A, D) ad circumferentias ductæ.

A ſphæræ centro G ducantur G A, G D; [a]hæ tranſeunt per circulorum centra H, I; connectantur H F, I E; & G F, G E. a 10 *hujus.*

1. *Hyp.* Ob A F = D E, [a]erit ang A G F = ang D G E; item ang G H F = rect. = ang G I E. & G F = G E, ergo G H = G I. [b]ergo circuli B F, C E æquantur. *Q.E.D.* a 27. 3. b 6 *hujus.*

2. *Hyp.* Quia circuli B F, C E pares ſunt, [b]erit G H = G I. item G F = G E, & H F = I E; [c]ergo ang A G H = ang D G E. [d]quare ſubtenſæ A F, D E pares ſunt. *Q. E. D.* c 8. 1. d 29. 3.

Prop. XXII. *Theor.*

Fig. 26. Si in ſphæra recta linea (A B) per centrum (A) ducta rectam aliquam lineam (C D) non per centrum ductam biſecet, ad angulos rectos ipſam ſecabit. Quòd ſi ad angulos rectos eam ſecet, etiam biſecabit ipſam.

Nam circuli per A B, C D deſcripti, [a]maximi ſcilicet, centrum erit A; ergo ſi B C = B D, [b]erit A B ad C D perpendicularis; & ſi A B ſit perpendicularis, [b]erit B C = B D. a 6 *hujus.* b 3. 3.

Digitized by Google

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIO.

IN ſphæra circuli ſe mutuò tangere ducuntur, cùm communis ſectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Prop. I. Theor.

Fig. 27.

In ſphæra paralleli circuli (B F, C E) circa eoſdem polos ſunt.

a 10. 1 *hujus.*
b *conv.*14.11.
c 8. 1 *hujus.*

Sint A, D poli circuli B F, quos connectat recta A D ; [a] hæc recta eſt circulo B F, [b] ergo & circulo C E ; [c] quare per polos circuli C E tranſit ; ergo A, D ſunt poli circuli C E. Unde liquet propoſitum.

Prop. II. Theor.

In ſphæra circuli (B F, C E) qui ſunt circa eoſdem polos (A, D), ſunt paralleli.

a 10. 1 *hujus.*
b 14.11.

Nam quia polos connectens recta A D utrique circulo B F, C E [a] recta eſt, [b] erunt paralleli iſti circuli. *Q. E. D.*

Scholium. Theor.

Fig. 28.

In ſphæra non ſunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

a 1. 2 *huj.*
b 10. 1 *huj.*
c 6. 1 *huj.*

Sint æquales duo circuli A B, E F, & paralleli : vis alterum C D hiſce parem dari, & parallelum. Sint igitur [a] communes omnium poli G, H, quos connectat recta G H ; [b] hæc per I centrum ſphæræ tranſit, & parallelis circulis recta eſt ; ergo ob circulos pares C D, E F, [c] erit I L = I M, contra *9. ax.* 1.

Prop.

Prop. III. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, A C) ſecent in eodem puncto (A) circumferentiam illius maximi circuli (A B C), in quo polos habent, ſe mutuò tangent illi circuli (A B, A C). Fig. 29.

Nam circulus A B C ad ambos A B, A C [a] rectus eſt, [b] quare communis horum ſectio (puta E D) circulo A B C recta eſt; ergo E D perpendicularis eſt rectis A B, A C (quæ communes ſunt ſectiones circuli A B C cum circulis A B, A C; & quæ diametri ſunt circulorum A B, A C). [d] ergo E D tangit circulos A B, A C, ergo hi ſe mutuò tangunt. *Q.E.D.*

a 15. 1. *huj.*
b 19. 11.
c 3. *def.* 11.
d 16. 3.
e *def.* 1. 2 *huj.*

Prop. IV. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, C B) ſe mutuò tangant, maximus circulus (D E) per eorum polos (D, E) deſcriptus, per eorum contactum (B) tranſibit. Fig. 30.

Si non tranſit per B, tranſeat per F; circulus igitur G F polo D, intervallo D F (majori quàm D B) deſcriptus ſecabit circulum C B in F. atqui circuli G F, C F ſe mutuò [a]contingunt (quia circulus maximus D F E tranſit per utriuſque polos). Quæ repugnant.

a 3. 2. *hujus.*

Prop. V. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, C B) ſe mutuò tangant, maximus circulus (D B) deſcriptus per unius (A B) polos (D), & per amborum contactum (B); per reliqui quoque circuli (C B) polos (E) tranſibit. Fig. 31.

Tranſeat circulus maximus D E per polos D, E; [a] hic per contactum B tranſibit: puta alterum maximum D B F tranſire per D, B. ergo cùm uterque arcus D B [b]ſit ſemicirculus, & D ſit polus circuli A B, erit B alter ejuſdem polus, ſitus in ſuâ ipſius circumferentiâ. *Q.E.A.*

a 4. 2 *hujus.*
b 11. 1 *huj.*

Prop. VI. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B) circulorum in ſphærica ſuperficie deſcriptorum aliquem (A C) tangat, tanget & alterum ei æqualem, & parallelum. Fig. 32.

Sint D & E poli circuli A C, quos nectat recta D E. Per A, D, E ducatur circulus maximus A D B E. Item polo E, per B, ducatur cir-

a 10. 1 hujus. culus B F. Et quia D E utrique circulo A C, B F [a]recta eſt, [b]erunt
b 14. 11. hi paralleli. Item ſi ex ſemicirculis A D B, D B E dematur communis
c ſch.22. 1 b. arcus D B, manet arcus A D = arc. B E. Unde circulus A C [c] æqualis eſt circulo B F. Denique quia polus circuli A B eſt in circulo
d 3. hujus. A D E, in quo itidem polus circuli B F; [d] tanget circulus A B circulum B F. Unde liquet propoſitum.

Coroll. Hinc liquet contactus A, B diametraliter opponi.

Prop. VII. Theor.

Fig. 32. Si ſint in ſphæra duo æquales, & paralleli circuli (A C, B F), maximus circulus (A B), qui eorum alterum (A C) tetigerit, reliquum quoque (B F) tanget.

a 6. 2. hujus. Nam ſi circulus A B non tangat ipſum B F, [a]tanget alterum ſaltem ipſi A C parem, & parallelum; ergo tanget tres circulos pares &
b ſch.1. 2 huj. parallelos. [b] *Q. E. A.*

Scholium. Theor.

Circuli (A C, B F) in ſphæra paralleli, quos maximus aliquis circulus (A B) tangit, æquales inter ſe ſunt.

a 1 hujus. Per [a]communes parallelorum polos D, E, & polos circuli A B de-
b 4 hujus. ſcribatur maximus circulus A F B, [b] qui per tactus A B tranſibit. Et
c 3. ax. 1. ob ſemicirculos A D B, D B E, [c]erit arcus A D = B E. [d] ergo cir-
d 2. ſch. 21. 1. hujus. culi A C, B F æquantur.

Prop. VIII. Theor.

Fig. 33. Si in ſphæra maximus circulus (A B) ad aliquem ſphæræ circulum (C D) obliquus ſit, tanget is duos circulos, æquales quidem inter ſe, parallelos autem prædicto circulo (C D), ad quem obliquus eſt.

Cape circuli C D polos E, F; perque hos, & polos circuli A B deſcribatur circulus E A B; item polo E per A, & polo F per B de-
a 3. 2 hujus. ſcribantur circuli A G, B H; [a] liquet circulum A B tangere circulos
b 6. 2 hujus. A G, B H; [b]hoſque pares eſſe, & [c] parallelos circulo C D. *Q.E.F.*
c 2. 2 hujus.

Schol. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (AB) circulorum aliquem (A G) tangat, obliquus erit ad alios circulos (C D) parallelos ei, quem tangit.

Nam quia circulus A B [a]non tranſit per polos circuli A G (tangit enim circulum A G, non biſecat); non tranſibit per polos circuli C D, [b]ergo obliquus eſt circulo C D. *Q.E.D.*

a 15.1 *hujus.*
b 13. 1 *huj.*

Prop. IX. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B C D, E D F B) ſe mutuò ſecent, maximus circulus (A E C F) per eorum polos ductus, biſecabit ſegmenta (B A D, B C D, & B E D, B F D) ipſorum circulorum.

Fig. 34.

Sint A C, E F ſectiones circulorum A D C, E D F cum circulo A E C F, & B D ſectio ipſorum A D C, E D F. Et quia circuli ADC, E D F circulo A E C [a]recti ſunt; erit B D ([b]recta circulo A E C F, [c]adeóque) perpendicularis rectæ A C. Ergo cùm A C ſit [d] diameter circuli A D C, [e] erit arc A B = arc A D, & arc C B = arc C D. Simili diſcurſu arc E B = arc E D, & arc F B = arc F D. *Q.E.D.*

a 15. 1 *huj.*
b 19. 11.
c 3. *def.* 11.
d 15. 1 *huj.*
e 28. 3.

Schol. 1. Theor.

Si in ſphæra circuli (A B C D, E B F D) ſe mutuò ſecent; circulus alius (A E C F) eorum ſegmenta (A B D, C B D; & E B D, F B D) biſecans, tranſit per eorum polos, eſtque maximus.

Nam ob A B + B C [a]= A D + D C; erunt arcus A B C, ADC ſemicirculi; ergo recta A C eſt diameter circuli A B C D; ergo cùm arcus A B, A D pares ſint, erit recta B G D rectæ A C perpendicularis: & pari diſcurſu recta B G D rectæ E F oſtendetur perpendicularis; quare B G D [b]recta erit circulo A E C F per ipſas AC, E F ducto; [c]ergo ambo circuli A B C D, E B F D recti ſunt circulo A E C F. [d] unde liquet circulum A E C F maximum fore, & per circulórum A B C D, E B F D polos tranſire. *Q. E. D.*

a 2. *ax.* 1.
b 4. 11.
c 18. 11.
d 3 *ſch.* 15. 1. *huj.*

Schol. 2. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B C D, E B F D) ſe mutuò ſecent, maximus circulus (A F C E) biſecans duo quæcunque illorum ſegmenta (B A D, B E D), habens tamen arcum (A F C E) inter illa ſegmenta poſitum ſemicirculo inæqualem) tranſit per polos ipſorum, duóque reliqua ſegmenta (B C D, B F D) biſecet.

Fig. 35.

Dic alium circulum maximum A G E deſcriptum iri per polos circulorum B C D, B F D; [a] hic ſegmenta B A D, B F D biſecabit, &

proinde

a 9. 2 *huj.*

Digitized by Google

proinde tranſibit per puncta A, E; unde arcus A F C E [b]erit ſemicirculus, contra hypotheſin; ergo A F C E tranſit per polos circulo-
b 11. 1 huj. rum ABCD, EBFD; [a]adeóq; ſegmenta BCD, BFD biſecat. *Q.E.D.*

Prop. X. Theor.

Si ſint in ſphæra paralleli circuli (A B C D, E F G H), per quo-
Fig. 36. rum polos (I) deſcribantur maximi circuli (A E I G C, B F I H D); parallelorum quidem circumferentiæ (A B, E F, & B C, F G &c.) inter maximos circulos interceptæ ſimiles ſunt; maximorum autem circulorum circumferentiæ (A E, B F, C G, D H) inter parallelos circulos interceptæ, ſunt æquales.

Sint A C, B D ſectiones circuli A B C D cum circulis A I C, B I D;
& E G, F H ſectiones circuli E F G H cum iiſdem A I C, B I D,
a 15. 1 hujus. [a]erunt A C, B D diametri circuli A B C D, & E G, F H diametri cir-
culi E F G H; ergo L & K ſunt centra circulorum A B C D, EFGH.
b 16. 11. Item (ob circulorum A C B, E G H parallelismum) [b]erunt E G, A C,
c 10. 11. & F H, B D parallelæ; [c]quare ang E K F = ang A L B; ergo ſi-
miles ſunt arcus A B, E F: eâdémque ratione arcus B C, F G ſimiles
* 5. def. 1 huj. oſtendentur. Quinimo * ſubtenſæ rectæ I A, I B, I C, I D, & [d]ideò
d 28. 3. arcus I A, I B, I C, I D æquantur; & pari modo arcus I E, I F, I G,
I H æquantur; unde etiam reliqui arcus A E, B F, C G, D H pares
ſunt. *Q. E. D.*

Prop. X I. Theor.

Fig. 37. Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F)
38. æqualia circulorum ſegmenta (A G C, D H F) ad angulos rectos in-
39. ſiſtant, à quibus ſumantur æquales circumferentiæ (A G, D H), qua-
40. rum quælibet inchoata ab extremitate ſui ſegmenti ſit minor ſemiſſe
41. circumferentiæ integri ſegmenti; à punctis autem (G, H) æquales
42. circumferentias (A G, D H) terminantibus, ducantur æquales rectæ lineæ (G B, H E) ad circumferentias circulorum (A B C, D E F) primò poſitorum; ipſæ circulorum primò poſitorum circumferentiæ (A B, D E) interceptæ inter illas rectas lineas (G B, H E) & extremitates diametrorum (A C, D F) erunt æquales.

a 30. 11. Ducantur G I recta plano A B C, & H K recta plano D E F ([a]ca-
dent hæ in rectas A C, D F); connectantúrque A G, B I; & D H,
b 27. 3. E K; & B L, EM (ad centra LM). Et propter arc. G C = arc. H F,
c 29. 3. [b]erit ang G A C = ang H D F. Item ang G I A * = rect. = ang
* 3. def. 11. H K D; & A G [c]= D H. [d]Ergo G I = H K, & A I = D K; un-
d 26. 1. de

Digitized by Google

de I L = K M). Item G B [c] = H E, & anguli G I B, H K E * ſunt e *hyp.*
recti: [g] ergo I B [f] = K E: itaque trigona B I L, E K M ſibi mutuò f 47. 1.
æquilatera ſunt; unde ang A L B = ang D M E. [h] ergo arcus A B, g 8. 1.
D E æquantur. *Q. E. D.* h 26. 3.

Si perpendicularis à G, & H incidant in diametrorum extremitates (ut in 5, & 6 figuris) brevius conficietur negotium ſic. Ob G A k *ſuprà.*
[k] = H D; & G B [c] = H E, & angulos G A B, H D E rectos. Erit l 28. 3.
quoque A B [f] = D E. [l] Ergo arc. A B = arc. D E. *Q. E. D.*

Prop. XII. Theor.

Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F) erigantur circulorum æqualium ſegmenta (A G C, D H F); & ab ipſis ſegmentis æquales circumferentiæ (A G, D H) ad extremitates ſegmentorum deſumantur, minores dimidiis ipſorum partibus; ab ipſis autem circulis æquales circumferentiæ (A B, D E) ſumantur ad eaſdem partes, quæ ſunt ad extremitates diametrorum: rectæ lineæ (G B, H E) ductæ à punctis in circumferentiis ſegmentorum ad puncta in circumferentiis circulorum, erunt æquales.

Fiat, ut in præcedenti; & quoniam (ut iſtuc oſtenſum) I L = a 27. 3.
K M, & B L = E M, & arc A B = arc D E, [a] erit ang I L B = ang K M E. [b] ergo B I = E K: ſed & G I = H K; & anguli G I B, H K E recti ſunt; [b] ergo B G = E H. *Q. E. D.*

In 5 & 6 Fig. ob arc A B = D E; & ideo rectam A B = D E, b 4. 1.
& A G = D H; & angulos G A B, H D E rectos, [b] erit G B = H E. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Si in ſphæra ſunt paralleli circuli (A B, C D, F G H), & deſcribantur maximi circuli (A F K, B H K), qui unum quidem (A B) parallelorum tangant, reliquos verò (C D, F G H) ſecent; circumferentiæ (A B, C D, F G; & A B, L E, M H) parallelorum, interceptæ inter eos maximorum circulorum ſemicirculos (B N P, A F O; & A M O, B H P), qui non concurrunt ſimiles erunt: maximorum verò circulorum circumferentiæ (A C, A L; B D, B E; & C F, L M; D G, E H; & A F, A M, B G, B H,) inter duos quoſcunque parallelos interceptæ, erunt æquales. Fig. 43.

---

* Fiant ſcilicet arc. K O = N A, & arc. K I = N B; unde quum

N P K, & N O K ſint ſemicirculi, erunt B N P, A F O ſemicirculi;
& adeò reliqui A M O, B H P etiam ſemicirculi).

* 1. 2 *hujus.* Per parallelorum *polos I, & contactus A, B deſcribantur circuli
maximi Q A I R, S B I T; eſtque arc C A [a] = arc A L, & arc D B
a 5 & 9. 2 *h.* [a] = arc B E; & arc C V [a] = arc V L; & arc D X [a] = arc X E.
Porro, quum circulus Q A I R circulo A F K, & circulus S B I T cir-
b 15. 1 *hujus.* culo B H K [b]recti ſint; & arcus A I, B I minores quadrante (ob cir-
culum A B R T non maximum); & arc A I = B I; erunt juxta
11 hujus arc A C, B E æquales. Ergo arcus A L, A C; B E, B D
æquales ſunt. Eodémque pacto arcus A M, A F, B H, B G æquan-
tur. Unde & reliqui C F, L M, E H, D H æquantur. *Q.E.D.*

c 29. 3. Item ob arc C A L = arc D B E; [c] erit ſubtenſa C L æqualis
d 28. 3. ſubtenſæ D E, & [d]proinde arcus C V L arcui D X E; & ſemiſſis C V
= D X: unde addito vel ſubtracto communi V D, erit arc C D =
e 10. 2 *huj.* arc V X. Ergo, cùm arcus V X [e]ſimilis ſit arcui A B, erit arcus C D
eidem A B ſimilis. Eadémque ratione arcus F G, neque non & arcus
E L, H M eidem A B ſimiles oſtendentur. *Q. E. D.*

Prop. XIV. Probl.

Fig. 44. Dato in ſphæra circulo (A B), qui minor ſit maximo, datóque in ejus circumferentia aliquo puncto (A), per illud punctum deſcribere circulum maximum, qui tangat datum circulum (A B).

a 20. 1 *huj.* Per A, & C (polum circuli A B) [a] deſcribatur circulus maximus
b 17. 1 *huj.* C A B E, è quo ſumatur quadrans A D. Polo D per A ducatur cir-
c 3. 2 *hujus.* culus A Z E; [b] hic maximus eſt, [c]& tangit datum A B in A. *Q.E.F.*

Prop. XV. Probl.

Fig 45. Dato in ſphæra circulo (A B), qui minor ſit maximo; & dato aliquo puncto (G) in ſphæræ ſuperficie, quod ſit inter datum circulum (A B), & alium ei æqualem & parallelum C D; per punctum illud datum (G) deſcribere circulum maximum, qui tangat datum circulum (A B), maximo minorem.

a 20. 1 *hujus.* Per E, F [a]polos parallelorum, & punctum G [a] deſcribatur circulus
& *coroll. ſchol.* maximus E A C, in quo capiatur quadrans B H; & polo E per H
10. 1. *huj.* deſcribatur circulus H I. Sumatur etiam quadrans G K, polóque G
per K deſcribatur circulus K L (qui certè maximus erit) ſecans circu-
lum H I in L (ſecabit verò, quia punctum K cadit inter H, & I; ob
arcum

arcum G H minorem, & arcum G I majorem quadrante G K: illud, quia B H eſt quadrans; hoc quia A F D, ipſi E A F æqualis, eſt ſemicirculus; & A I ([b]=B H) eſt quadrans; & proinde D I eſt quadrans) tum per L & polos E, F ducatur maximus circulus E L F ſecans circulum A B in M; polóque demum L per M ducatur circulus M N: dico factum. Nam arc. L M [b] æquatur arcui H B quadranti, [c] ergo M N eſt maximus circulus. Item, quia circ. K L tranſit per polum L circuli M N, [d] tranſibit hic viciſſim per polum illius, hoc eſt per G: denique quia circuli A B, G N ſecant maximum circulum E F, in quo polos habent, in eodem puncto M, [e] ipſi ſe contingent mutuò. Itaque factum.

b 2 & 19. 2 *hujus.*
c 17. 1 *huj.*
d 1 *ſch.* 15. 1 *hujus.*
e 3 *hujus.*

Scholium.

Simili diſcurſu, aliud punctum, quo circulus K L ſecat circulum H I, polus erit alterius circuli maximi tranſeuntis per G, tangentíſque circulum A B.

Prop. XVI. Theor.

Maximi circuli, qui ſimiles circumferentias parallelorum circulorum auferunt, aut per parallelorum polos tranſeunt, aut eundem unum parallelum tangunt.

Fig. 46.
47.
48.

1°, Auferant circuli maximi A B C, D B E (ex parallelis A D C, F G) ſimiles arcus A D, F G; & alter A B C tranſeat per polos parallelorum; erit maximorum interſectio B, polus parallelorum. Si negas, ſit H polus ipſorum, & per H, G ducatur maximus H G I (ſecans ipſum A D C in I), unde arcus A I, F G [a] ſimiles ſunt. ergo cùm A D, F G ſimiles ponantur, erunt A I, A D ſimiles, adeóque pares. *Q. E. A.*

a 10. 2 *huj.*

2°. Auferant maximi A B C, D E F ſimiles arcus A D, B E; & neuter per polos tranſeat, ſed alter A B C unum B E tangat (in B); etiam D E F eundem B E tanget in E. Vis ſecare? [b] itaque per E deſcribatur circulus maximus G E H. [c] ergo arcus A G, B E ſimiles ſunt; proindè verò arcus A D, A G ſimiles erunt. *Q. E. A.*

b 14. 2 *huj.*
c 13. 2 *huj.*

3°. Auferant (ex parallelis A D C, G H) maximi A B C, D E F ſimiles arcus A D, G H, & neuter per polos tranſeat, aut unum tangat parallelorum; [d] ergo circulus A B C parallelis obliquus eſt; [e] ergo tanget aliquem, puta (B E) ipſis A D C, G H parallelum; eundem B E tanget circulus D E F: ſi negas; per H, [f] deſcribatur circulus maximus K H I tangens ipſum B E in I, [g] ergo arcus A K, G H ſimiles, itidémque arcus A K, A D ſimiles erunt. *Q. E. A.*

d 13. 1. *huj.*
e 8. 2 *hujus.*
f 15. 2 *huj.*
g 13. 2 *huj.*

Digitized by Google

Prop. XVII. *Theor.*

Fig. 49. In ſphæra paralleli circuli (A B, E F), inter quos, & parallelorum maximum (C D) æquales circumferentiæ (A C, C E) maximorum circulorum intercipiuntur, ſunt inter ſe æquales; illi verò (A B), inter quos & maximum parallelorum (C D) majores maximorum circulorum circumferentiæ (A C) intercipiuntur, ſunt minores.

Nam primò tranſeat circulus maximus A C E F D B per polos pa-
a 15. 1 *huj.* rallelorum; ergo communes ſectiones A B, E F [a] erunt diametri cir-
b 10. 2 *huj.* culorum A B, E F. Jam ſi arc A C ([b]B D) = arc C E ([b]D F); ob
c 11. 1 *huj.* arc C G D [c] = arc C H D; erit arc A G B = arc E H F; [d] unde
d 29. 3. ſubtenſæ A B, E F pares erunt, & proinde circuli A B, E F etiam pares. *Q. E. D.* Quod ſi arc A C (B D) $\sqsubset$ arc C E (D F) erit arc A G B $\sqsupset$ arc E H F, & ſubtenſa A B $\sqsupset$ E F, & circulus A B $\sqsupset$ E F. *Q. E. D.*

Fig. 50. Non tranſeat ſecundò circulus maximus A C E F D B per paralle-
lorum polos (G, H); verùm per hos, & polos circuli A C E F D B
e 20. 1 *hujus.* [e] deſcribatur circulus G I H K. [f] Itaque poli circuli G I H K erunt in
f 1 *ſch.* 15. 1 *h.* utroque maximo circulo A C E F D B, & C D. ergo ad interſectiones
g 5. *def.* 1 *huj.* C, D; [g] proinde arcus C I, C K æquantur.
& 28. 3. Jam ſi arc C A = arc C E, erit arc A I = arc E K. Item (ob ſe-
h 12. 2 *huj.* micirculos I K, G H) arc G I = H K; [h] ergo rectæ G A, H E pares
k 2 *ſch.* 20. 1 *h.* ſunt, & [k] conſequenter circuli A B, E F pares erunt. *Q. E. D.*
Sin arc C A $\sqsubset$ arc C E; ſit arc C L = arc C E. Ergo parallelus
l 6. 1 *hujus.* per L æquabitur (uti mox oſtenſum) parallelo E F. [l] Quare parallelus A B minor erit ipſo E F. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. *Theor.*

In ſphæra maximorum circulorum circumferentiæ (A C, E C) interceptæ inter maximum parallelorum (C D), & duos alios circulos (A B, E F) æquales & parallelos, ſunt æquales. Illæ verò (A C) quæ intercipiuntur inter majorem parallelum (A B) & maximum C D, ſunt minores.

a 17. 2 *huj.* Nam in 1ª hyp. ſi dicas eſſe A C $\sqsubset$ C E, [a] erit idcirco circ A B $\sqsupset$ circ C D; in 2ª hyp. ſi dicas eſſe A C = vel $\sqsubset$ C E, [a] erit ergo circ A B = vel $\sqsubset$ circ C D, contra hypotheſin.

Prop. XIX. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) parallelos aliquot circulos (E F, G H, I K) in ſphærica ſuperficie deſcriptos ſecet quidem, non tamen per polos, in partes inæquales eos ſecabit, excepto parallelarum maximo (G H): de parallelorum autem ſegmentis in hemiſphæriorum uno (G Q H) interceptis, ea (L F M), quæ ſunt inter maximum parallelorum (G H) & polum conſpicuum (Q) ſunt majora ſemicirculo, reliqua verò (O P K), quæ ſunt inter maximum parallelorum & polum occultum (R) ſunt ſemicirculo minora; æqualium denique ac parallelorum circulorum (E F, I K) alterna ſegmenta (L F M, O I P; & L E M, O K P) ſunt inter ſe æqualia. Fig. 51.

1. Per polos Q, R & punctum B deſcribatur circulus maximus
(Q B R; is [a] tranſit etiam per D, unde arc B H D = arc B G D: a 11. 1 *huj.*
[b] item arc S F T = arc S E T, [b] & arc X K V = arc X I V. ergo arc b 15. 1 *huj.*
L F M $\sqsubset$ arc L E M, & arc O I P $\sqsubset$ arc O K P.

2. Si circulus E F = circ I K, per polos parallelorum Q, R, &
polos circuli A B C D, ducatur circulus A G H: [c] iſtius circuli poli c 1 *ſch.* 15. 1
ſunt B, D: ergo arcus B A, B C æquantur. [d] Item arc B L = arc *hujus.*
B O; ergo arc L A = arc O C. ergo arc L A M [e] (2 L A) = arc d 18. 2 *huj.*
O C P (2 O C): unde ſubtenſa L M = O P. Ergo arc L E M = e 9. 2 *huj.*
arc O I P. arc C E M = arc O K P. *Q.E.D.*

Prop. XX.

Si in ſphæra maximus circulus (G L) parallelos aliquot circulos (A B, C D, E F) ſecet, non tamen per polos; de parallelorum aſſumptis circumferentiis in uno hemiſphærio, illæ (O B H), quæ propiùs accedunt ad polum conſpicuum (P) erunt majores, quàm ut ſimiles eſſe poſſint illis (N D I), quæ ab eodem conſpicuo polo longiùs abſunt. Fig. 52.

Nam ſi per P, I; & P, N ducantur circuli maximi ſecantes ip-
ſum A B in R, S; erit arcus H B O major arcu R B S, [a] qui ſimilis eſt a 10. 2 *huj.*
arcui I D N; unde liquet propoſitum.

Prop. XXI.

Si in ſphæris æqualibus maximi circuli (B N D, F O H) ad maximos circulos (A B C D, E F G H) inclinentur; ille (B N D) cujus Fig. 53: 54.

polus (P) ſublimior eſt ſupra planum ſubjectum, inclinatior erit; illi verò circuli, quorum poli æqualiter diſtant à ſubjectis planis, æqualiter inclinantur.

Per L, P polos circulorum A B C D, B N D; perque M, Q polos circulorum E F G H, F O H ducantur maximi circuli A L C, E M G;
a 6. 1 *hujus.* [a] interſectiones A C, B D, M I concurrunt in ſphæræ centro I. Et
b 19, & 3 *def.* 11. quoniam anguli A I D, N I D [b] recti ſunt, (quippe cùm planum
A N C [c] rectum ſit planis A B C D, B H D), [d] erit ang A I N inclinatio
c 15. 2 *huj.* plani B N D ad planum A B C D; pariterque ang E K O eſt inclinatio
d 6 *def.* 11. circuli F O H ad planum EFGH. Cùm igitur ſit arc C P [e] ⊏
e *hyp.* G Q, & arc P N = Q O, & proinde arc C N ⊏ G O, erit arc N A
f 27. 3. ⊐ arc O E; [f] quare ang A I N ⊐ ang E K O: *Q.E.D.*

Quòd ſi arc C P = G Q, ſimili diſcurſu liquet angulos A I N, E K O æquari. *Q.E.D.*

Facilè convertitur hoc Theorema.

Schol. 1. *Theor.*

Fig. 55. Circuli maximi (A B, C B) tangentes eundem parallelum (A C), æqualiter inclinantur ad maximum parallelorum (D E); qui vero (G H) majorem parallelum I G tangit, inclinatior eſt ad parallelorum maximum (D E); & circuli (A B, C B) æqualiter inclinati ad parallelorum maximum (D E) tangunt eundem parallelum (A C). Qui verò (G H) inclinatior eſt ad maximum parallelum, majorem parallelum (IG) tangit.

1. Per F polum parallelorum, & contactus A, C deſcribantur
a 5. 2 *hujus.* maximi circuli F A D, F C E; [a] tranſeunt hi per polos circulorum
b 15. 1 *huj* A B, C B, [b] ſecántque adeò ipſos perpendiculariter: ergo F A eſt altitudo poli F ſupra circulum A B; & F C altitudo ejuſdem ſupra circu-
c 5. *def.* 1 *huj.* & 28. 3. lum C B; quare cùm ſit F A [c] = F C, liquet primum.

2. Per polum F, & contactum G deſcribatur maximus circulus F G E; ergo (ut priùs) F G eſt altitudo poli F ſupra circulum G H:
d 21. 2 *huj.* atqui F G ⊏ F A: [d] unde liquet ſecundum.

3. Per F, & polos circulorum A B, C B deſcribantur maximi circuli F A D, F C E; [b] hi ſecant illos perpendiculariter; ergo arcus FA,
c *hyp.* F C ſunt elevationes poli F ſupra circulos A B, C B; [c] ergo arcus FA,
d 3. 2 *huj.* F C pares ſunt. [d] itaque circulus intervallo F A, vel F C deſcriptus tanget circulos A B, C B: quod erat tertium.

4. Per F, & polum circuli G H deſcribatur circulus maximus F G E.

F G E. ergo arcus F G eſt elevatio poli F ſupra circulum G H. Atqui arc F G [c] $\sqsubset$ arc F A. ergo circ [d] tangens, polo F per G deſcriptus major erit quàm A C. Quod erat ultimum.

Schol. 2. *Theor.*

Circuli maximi (A B, C D) ad parallelorum maximum (D B) Fig. 56.
æqualiter inclinati, polos (E, F) habent in circumferentiâ ejuſdem paralleli. Et circuli maximi (A B, C D) qui polos (E, F) habent in circumferentia ejuſdem paralleli (E F), ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinantur.

1. Deſcriptis per G polum parallelorum, & per E, F polos circu- a 15.1 *hujus.*
lorum A B, C D circulis maximis G E, G F; quia hi [a] recti ſunt illis, b *hyp.*
[b] erunt arcus G E. G F pares. [c] ergo circulus polo G per E, F de- c 2, 2 *hujus.*
ſcriptus parallelus eſt circulo D B. *Q.E.D.*

2. Ob arc G E [d] = G F, [e] erunt circuli A B, C D æqualiter in- d 5. *def.* 1 *h.* 2.
clinati ad ipſum B D. *Q. E. D.* e *ſch.* 21. *h.*

Schol. 3. *Theor.*

Si ſuper circuli (A B D E) diametro A D conſtituatur rectum cir- Fig. 57.
culi ſegmentum (A F D), dividatur autem ſegmenti inſiſtentis cir- 58.
cumferentia (A F D) in duas inæquales partes (A F, F D); & à ſectionis puncto (F) ad circumferentiam circuli primi plurimæ rectæ lineæ (F A, F I, F H, F B, F C, FD, F E) cadant; erit recta (F A) ſubtendens minorem partem (F A) inſiſtentis ſegmenti omnium minima: quæ autem majorem (F D) ſubtendit, omnium maxima: reliquarum verò maximæ propinquior (F C) remotiore (F B) ſemper major eſt; duæ verò rectæ æquales (F E, F C) ab eodem puncto (D) in circumferentiam circuli (A B D E) à maxima (F D) æqualiter diſtantes.

Ducatur F G normalis plano A B D E, & connectantur G C,
G B, G H, G I, G E; [a] liquet punctum G eſſe in recta A D; & ob a 38. 11.
F A [b] $\sqsupset$ F D, [c] erit G A $\sqsupset$ G D; [c] item G A $\sqsupset$ G I $\sqsupset$ G H &c. b *hyp.*
[c] & G D $\sqsubset$ G C $\sqsubset$ G B &c. c 7. *vel* 8. 3.

Ergo in triangulis rectangulis F G A, F G I, F G H, [d] erit F A d 47. 1.
$\sqsupset$ F I $\sqsupset$ F H; at in triangulis rectangulis F G D, F G C, F G B,
[d] erit F D $\sqsubset$ F C $\sqsubset$ F B. Demum ob G E [b] = G C, [d] erit F E =
F C. Quæ *E. D.*

Schol. 4. *Theor.*

Fig. 59. Si in ſphæræ ſuperficie intra cujuſq; circuli peripheriam (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G B, G E, G C, G D) circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores; maximus eſt (G F A, qui per polum circuli ducitur; minimus autem, qui (G D) ei adjacet; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore (G C) ſemper major eſt; duo verò arcus (G E, G B) ab eodem maximo (G A) vel minimo (G D) æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

a 15. 1 *hujus.*
b 3. *ſch.* 21 *h.*

Nam quoniam arcus A G D [a] perpendiculariter inſiſtit ſemicirculo A C D, [b]erit ſubtenſa G A major ſubtenſâ G B; [b]& G B ipſâ G C: ergo arcus G A major eſt arcu G B; & G B ipſo G C. & ſic in reliquis, juxta Scholium præcedens.

Schol. 5.

Fig. 60. Si in ſphæræ ſuperficie extra peripheriam cujuſq; circuli (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, GG, GB, GE) ducantur ſemirculo minores, ſecantéſque circumferentiam circuli: maximus eſt qui (G F A) per circuli polum ducitur; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore ſemper major eſt: minimus autem eſt ille (G D) maximi, qui inter punctum (G) & circuli circumferentiam extra circulum interjicitur: reliquorum verò minimo propinquior (G H) remotiore (G I) ſemper minor eſt. Duo verò arcus (G B, G E; & G H, G K) ab eodem maximo vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

Itidem patet hoc ex Scholio penultimo, ex ſubtenſis ad arcus diſcurrendo.

Prop. XXII.

Fig. 61. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) unum quidem circulum (A F) tangat, alium verò ei parallelum (G B H D) ſecet, poſitum inter ſphæræ centrum, & eum circulum quem tangit maximus circulus; polus autem (E) maximi circuli fuerit inter utrumque parallelorum (A F, G B H D), deſcribantúrque maximi circuli (G L, H K, M P, N K,

N K, O L) tangentes duorum parallelorum majorem (G B H D): hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum (A B C D), & eorum rectiſſimus quidem erit ille (H K), cujus contactus erit in eo puncto (H), in quo majus ſegmentum (B H D) paralleli majoris bifariam dividitur; humillimus verò & maximè inclinatus (G L) cujus contactus erit in eo puncto (G), in quo minus ſegmentum (B G D) bifariam dividitur; reliquorum autem illi quidem (M P, N K) qui æqualiter diſtant ab alterutro eorum punctorum (H, G) in quibus ſegmenta bifariam ſecantur, ſunt ſimiliter inclinati; qui verò (O L) contactum remotiorem habet à puncto (H), in quo majus ſegmentum biſecatur, inclinatior perpetuò eſt eo (N K), qui contactum eidem puncto propiorem habet. Poli denique maximorum circulorum erunt in uno circulo, qui & minor erit eo circulo (A F) quem tangit maximus in principio circulus, & eidem parallelus erit.

Per I polum parallelorum, & E polum circuli A B C D, ducatur circulus; is [a]biſecat ſegmenta B G D, B H D, [b]tranſitque per contactum A: ſit itaque circulus G A I E H C, fiat arcus H Q æqualis quadranti E A. ergo H Q ⊏ H I; atque Q cadit inter I, & A; itaque polo I per Q deſcriptus circulus Q T R, erit parallelus circulo A F, eóque minor. Per I, & puncta contactuum ducantur maximorum circulorum arcus M I S, N I T, O I V, qui [c]tranſibunt per polos tangentium: ac ob arcus I H, I M, I N, I O, I G [d]æquales; & arcus I Q, I S, I T, I V, I R [d]etiam pares; erunt toti arcus H Q, M S, N T, O V, G R æquales; ergo cùm H Q ſit quadrans, erunt reliqui omnes etiam quadrantes; [e]ergo puncta Q, S, T, V, R erunt poli tangentium. *Q. E D.*

Porro, quoniam arcus H M, H N [f]pares ſunt, erunt iſtis [g]ſimiles arcus R φ, R Ψ pares. ergo oppoſiti arcus Q T, Q S pares ſunt (nam ductæ rectæ R Q, φ S, Ψ T eſſent [h]diametri circuli Q T R) [k]ergo ducti arcus E T, E S pares erunt; & arcus E T ⊏ E V; & E Q maximus, ac E R minimus horum: [l]ergo circulus H K minimè inclinatur ad circulum A B C D, & G L maximè; & M P, N K æqualiter, & O L magis quàm N K. *Q.E.D.*

a *9. 2 huj.*
b *4. 2 hujus.*
c *5. 2 hujus.*
d *5 def. 2 h.*
e *16. 1 huj.*
f *hyp.*
g *10 hujus.*
h *15. 1 hujus.*
k *4. ſch. 21. 2 h.*
l *21. 2 huj.*

Prop. XXIII.

Iiſdem poſitis, ſi circumferentiæ (M O, N P) circulorum tangentium (M O, N P) à contactibus (M, N) ad nodos (O, P) ſint æquales, prædicti circuli maximi (M O, N P) ſimiliter inclinati erunt.

Fig. 62.

E Nam

Nam per E polum circuli A B C D, & I polum parallelorum du-
catur circulus maximus G A C; & per I, ac contactus M, N deſcri-
a 5. 2 *huj.* bantur circuli maximi I M, I N: & quoniam hi [a] per polos tangenti-
b 15. 1 *huj.* um M O, N P tranſeunt, [b] inſiſtunt ipſis M O, N P diametricè & re-
c *hyp.* ctò; & inæqualiter ſecantur in I, & arc M O [c] = N P; [d] ergo du-
d 12. 2 *h.* ctæ rectæ I O, I P æquantur: ergo circulus O K P polo I per O de-
ſcriptus tranſibit per P; ſunt etiam arcus M O, M Q, & arcus S O,
e 9. 2 *huj.* S Q [e] æquales; itidémque arcus N P, N R, & arcus T P, T R pa-
res ſunt; ergo (ob arc M O = N P) erunt toti O M Q, P N R pa-
f 29. 3. res; [f] ideóque ſubtenſæ O Q, P R; & [g] propterea arcus O S Q,
g 28. 3. P T R, & horum dimidii S O, T P pares erunt. Item arcus K O,
h 10. 2 *huj.* [e] æquantur; ergo reliqui arcus K S, K T, hiſque [h] ſimiles arcus H M,
k 22. 2 *hujus.* H N æquabuntur: [k] ergo circuli M O, N P ſimiliter inclinantur ad
circulum A B C D. *Q. E. D.*

LIB.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER TERTIUS.

Prop. I.

SI circulum (A C B D) inæqualiter ſecet recta linea (A B); ſuper qua conſtituatur rectum circuli ſegmentum (A F B), non majus ſemicirculo; dividatur autem inſiſtentis ſegmenti circumferentia in duas partes inæquales (F A, F B); recta linea (F B) ſubtendens earum minorem, minima eſt linearum rectarum (F G, F H, F K, &c.) ductarum ab eodem puncto (F) ad majorem partem (A C H) circumferentiæ primi circuli: rectarum verò ductarum ab eo ipſo puncto ad circumferentiam (B C) interceptam inter illam minimam rectam (F B) & diametrum (C D) in quam cadit perpendicularis (F L) deducta ab illo puncto (F), ſemper minimæ propior (F G) remotiore (F H) minor eſt. Omnium autem maxima eſt ea (F C) quæ ab illo eodem puncto ducitur ad extremitatem ejuſdem diametri. Item recta (F A) ſubtendens majorem circumferentiam ſegmenti inſiſtentis, minima eſt earum (F A, F I, F K, &c.) quæ cadunt in circumferentiam (A C) interceptam inter ipſam & diametrum (C D), ſempérque huic propior (F I) remotiore (F K) minor eſt. Si verò recta linea (A B) ſubjectum circulum ſecans ſit ejus diameter, & reliqua omnia eadem ſint ut ſuprà; recta linea (F B) ſubtendens minorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis, minima eſt rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi & ſubjecti circuli circumferentiam; ea verò (F A) quam majorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis ſubtendit, maxima eſt. Fig. 63.

Connectantur rectæ L G, L H, L I, L K. Et quoniam L B [a] ⊐ a 7. 3.
L G [a] ⊐ L H, erit (in triangulis rectangulis F L B, F L G, F D H)
F B [b] ⊐ F G [b] ⊐ F H. Similiter, ob L A ⊐ L I ⊐ L K, erit F A b 47. 1.
⊐ F I ⊐ F K. Et quoniam L C eſt [a] maxima omnium ab L ad circumferentiam A C B, [b] erit F C maxima omnium ab F ad eandem

Sin arcus A C B, A D B pares ſint, patet res ex 3° Scholio 21æ ſecundi hujus.

Prop. II.

Fig. 65. Si recta linea (A B) ſecans circulum (A C B D) auferat ſegmentum (AC B) non minus ſemicirculo; ſuper ipſâ verò recta linea (AB) ſtatuatur aliud circuli ſegmentum A F B quod & ſemicirculo majus non ſit, & inclinatum ſit ad alterum ſegmentum (A D B), ſemicirculo non majus: dividatur autem inſiſtentis ſegmenti circumferentia in partes inæquales (AF, FB): recta linea (F B) ſubtendens minorem circumferentiæ partem, minima eſt rectarum omnium (F B, F G, FH, &c.) ductarum ab illo puncto (F), à quo ipſa ducitur, ad ſubjecti circuli circumferentiam illam, quæ ſemicirculo minor non eſt: & reliqua omnia, quæ in præcedenti, ſequuntur.

Ex caſu vario perpendicularis F L varii caſus emergunt.

Iterum demiſsâ rectâ F L ad planum A C B D rectâ F L, ductiſq; rectis C E L D, L B, LG, L H, L A, L I, L K; liquet fore $FB \sqsupset FG \sqsupset FH \sqsupset FC$; & $FA \sqsupset FI \sqsupset FK \sqsupset FC$, ut præcedenti.

Prop. III.

Fig. 65. 66. Si in ſphæra duo circuli maximi (A B C, D B E) ſe mutuò ſecent, ab eorum verò utroque ſumantur æquales circumferentiæ (B A, B C, & B D, B E) utrinque à puncto (B), in quo ſe ſecant: rectæ lineæ (A D, C E), quæ extrema puncta circumferentiarum connectunt ad eaſdem partes, æquales ſunt inter ſe.

Sint primùm omnes B A, B C, B D, B E æquales; & polo B ducatur circulus A D C E; [a]ergo ſectiones A C, D E ſunt ejus diametri; & F centrum; & radii F A, F B, F D, F E pares. Item ang. E F C [b]= ang A F D. [c]ergo E C = A D.

a 15. 1 *hujus.*
b 11. 1.
c 4. 1.

Sin omnes non æquentur, polo B per A, & C ducatur circulus A G C H, cui occurrat utrinque productus arcus D B E in G, & H. ergo B G = B H, item B D = B E. ergo D G = E H. Atqui etiam (ſicut in priori parte) ſubtenſæ G A, C H, adeóque arcus G A, C H æquantur; quare cum circuli ſegmentum GBH[a]rectum ſit circulo ACCH; [a]& arcus G A H, G C H ſint ſemicirculi; [e] liquet rectas A D, C E æquari.

d 28. 3.
e 12. 2 *hujus.*

Prop.

Digitized by Google

Prop. IV.

Si in ſphæra duo maximi circuli (A B C, D B E) ſe mutuò ſecent, ab eorúmque altero (A B C) ſumantur æquales circumferentiæ (B A, B C) utrinque à puncto interſectionis (B); & per puncta (A, C) terminantia æquales circumferentias ducantur duo plana parallela (A F G, C H I), quorum alterum (A F G) conveniat cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, extra ſphæram, versùs prædictum punctum (B): ſit verò una illarum æqualium circumferentiarum (B A, B C) major utralibet circumferentiarum (B F, B H) in altero maximo circulo (D B E) interceptarum inter prædictum punctum (B) & utrumque planorum parallelorum: ea circumferentia (B H) quæ eſt inter illud punctum (B) & planum (C H I) quod non convenit cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, major eſt quàm ea ejuſdem circuli circumferentia (B F), quæ eſt inter idem punctum (B) & planum (A F G) quod convenit cum communi ſectione circulorum. Fig. *67.*

Polo B per A, C ducatur circulus A D C E; habens A G, I C ſectiones cum parallelis planis A F C, I H C; & A C, D E ſectiones
cum maximis circulis A B C, D B E; unde harum interſectio (K) a *15. 1 huj.*
[a] erit centrum circuli A D C E.

Jam, ob A G, C I [b] parallelas, [c] erit ang K A M = ang K C N: b *16. 11.*
item ang A K M [d] = ang C K N. & K A = K C. [f] ergo K M = c *28. 1.*
K N; [g] adeóque M D = N E. Porro K B (communis ſectio cir- e *15. 1.*
culorum A B C, D B E) [h] recta eſt circulo A D C E; & propterea f *26. 1.*
[k] ang L K M rectus eſt; [l] ergo ang L M K acutus eſt, & ei æqualis g *3. ax. 1.*
H N E; angulus autem D M F obtuſus. ergo arc E H $\sqsupset$ arc D F; h *19. 11.*
& ideo reciprocè (cùm æquales ſint arcus B D, B E) arc B H $\sqsubset$ arc k *3. def. 11.*
B F. *Q.E.D.* l *17. 1.*

Obſ: quòd arc E H $\sqsupset$ arc D F patet. Nam quia M D, N E æquantur, perpendiculares ab M, N auferent æquales arcus in circumferentia D B E; quorum alter minor eſt arcu D F, ob angulum D M F obtuſum, alter major arcu E H, ob angulum E N H acutum: ergo liquet arcum D F eſſe majorem arcu E H.

Prop. V.

Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) ſit polus (A) parallelorum; húncque circulum maximum ſecent ad angulos rectos Fig. *68.*

duo alii maximi circuli (B D, E C); quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (E C) obliquus ſit ad parallelos: ab hoc autem obliquo circulo (E C) ſumantur æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli (I K, L M, N O): circumferentiæ (I L, L N) maximi illius circuli primò poſiti inter parallelos interceptæ, inæquales erunt; ſempérque ea (I L) quæ propior fuit maximo parallelorum, remotiore (L N) major erit.

Per polum A, & punctum G ducatur maximus circulus A G P, liquet arcus G P, G F eſſe minores ſemicirculo (nam G P eſt minor quadrante A K, unde G F non ſecat G P inter G & P, & proinde GF
a 5.*ſch.*21.2 *b.* etiam minor eſt ſemicirculo). Item G P tranſit per polos circuli I K, ergo arc G P $\sqsupset$ G F. Simili diſcurſu arc G Q $\sqsupset$ arc G H. Item recta per G ad centrum ſphæræ (hoc eſt communis ſectio circulorum A P, E C) ſecat interjectum planum circuli I K intra ſphæram; ergo eadem ſecabit planum paralleli N O extra ſphæram. Ergo, juxta præ-
b 10.2 *hujus.* cedentem arc G P major eſt arcu G Q; quare cùm ſit arc I L [b] = G P; & arc L N [b] = G Q; erit arc I L major arcu L N. *Q. E. D.*

Prop. VI.

Fig. 69. Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) ſit polus (A) parallelorum, húncque maximum circulum ad angulos rectos ſecent duo alii circuli maximi (B D, E C), quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (E C) ſit obliquus ad parallelos: ſumantur autem ab obliquo circulo (E C) æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eaſdem partes maximi illius paralleli; & per puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias, pérque polum (A) deſcribantur maximi circuli (A I, A K, A L): hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quorum propior (K L) maximo circulo primò poſito (A B C D) ſemper erit major remotiore (K I).

a 5.3 *hujus.* Per puncta F, G, H deſcribantur paralleli M N, O P, Q R; [a] ergo
b 10.2 *hujus.* arc O M $\sqsubset$ O Q; & [b] proinde arc G V $\sqsubset$ G X: fiat arc G Y =
G X, & per Y deſcribatur parallelus S T; cùm igitur arcus G Y,
c 3.2 *hujus.* G X, & arcus G H, G F pares ſint, [c] erunt ductæ rectæ H X, Y F
d 15.1. *hujus.* æquales. Porro circulus S Z T [d] circulo A I rectò inſiſtit, & biſecatur ab eo (ductâ ab Z ad alteram ſectionem rectâ) & ſegmentum circuli A I ab Z per I ad alteram ſectionem majus eſt ſemicirculo; &

arcus Y Z eſt quadrante minor, (nam quia circulus A B C D rectus
eſt circulis B D, E C, tranſibit per eorum polos, & [e] biſecabit eorum e *9. 2 hujus.*
ſegmenta; unde arcus B φ, E φ erunt quadrantes; quare K I quadrante
minor eſt; & proinde ipſi [f] ſimilis Y Z quadrante minor eſt). f *10. 2 hujus.*
[g] ergo recta Y Z eſt minima cadentium in circumferentiam Z I; adeóque g *1 hujus.*
minor ipſâ Y F, [h] hoc eſt ipſâ H X. ergo cùm circulus Q R minor h *priùs.*
ſit circulo S T, erit arcus H X major quàm ut ſit ſimilis arcui Y Z.
(Major enim ſubtenſa ex minore circulo majorem proportione arcum
aufert, quàm minor ex majore,) ergo arcus L K ([f] ſimilis arcui
H X) major eſt, quàm ut ſimilis ſit arcui K I (qui ſimilis eſt arcui
Y Z). quare cùm arcus L K, K I ſint in eodem circulo, erit ſimpliciter
arc L K major arcu K I. *Q. E.* D.

Prop. VII.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tangat aliquem ſphæræ Fig. 70.
circulum (A E); alius autem maximus circulus (G H) ad parallelos obliquus ſit, tangátque circulos majores illis, quos tangit maximus circulus primò poſitus; fuerintque eorum contactus (G, H) in maximo circulo primò poſito; & ſumantur à circulo obliquo circumferentiæ (I K, K L) æquales, & continuæ ad eaſdem partes maximi (B D) parallelorum: per puncta autem (I, K, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli (M N, O P, Q R); hi circumferentias inæquales (M O, O Q) intercipient de maximo circulo (A B C D) primò poſito; quarum ea (M O) quæ propior erit maximo parallelorum, erit major remotiore (O Q).

Per S polum parallelorum, & punctum K deſcribatur circulus maximus
S K, ſecans parallelos punctis T, V: item per K [a] deſcribatur a *15. 2 h.*
circulus maximus K E tangens parallelum A E in E verſùs partes G
(unde K E cadit inter S V, & G I; nam ſi extra G I caderet, non
tangeret circulum A E, quoniam ipſi K G non priùs occurrit quàm
in puncto quod opponitur puncto K). ergo cùm arcus S V tranſeat
polum circuli M N, [b] erit K V minimus arcus omnium à K ad M N b *5 ſch. 21. 2 h.*
cadentium, & K Y minor quàm K I; paritérque K X ⊐ K L; ergo
(ut in 5tâ hujus) erit arcus K Y major arcu K X; ſed arcus M O [c] æquatur c *13. 2 huj.*
arcui K Y, [c] & arcus O Q arcui K X; ergo arcus M O major
eſt arcu O Q. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. VIII.

Fig 71. Si in ſphæra maximus circulus (A B) tangat aliquem ſphæræ circulum (A C;) aliquis autem alius maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos majores illis, quos tangebat maximus circulus primò poſitus; fuerítque eorum contactus in maximo circulo primò poſito: ſumantùr autem de obliquo circulo æquales circumferentiæ continuæ (F G, G H) ad eaſdem partes maximi parallelorum, pérque puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentías deſcribantur maximi circuli (M N, K L, C I), qui & tangant eundem circulum (A C) quem tangebat maximus circulus primò poſitus, & ſimiles parallelorum circumferentias intercipiant; habeántque eos ſemicirculos, qui tendunt à punctis contactuum (C, K, M) ad puncta (F, G, H) terminantia æquales obliqui circuli circumferentias, per quæ deſcribuntur, ejuſmodi ut minimè conveniant cum illo circuli maximi primò poſiti ſemicirculo, in quo eſt contactus (A) obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum. Inæquales intercipient circumferentias (I L, L N) de maximo parallelorum (B D), quorum propior (I L) circulo maximo (A B) primò poſito, ſemper erit major remotiore (L N).

Per puncta F, G, H deſcribantur paralleli P F, Q G, R H ſecantes
a 7. 3 hujus. circulum K L in O, S; [a] ergo arc Q P $\sqsubset$ Q R, & [b]ideo arc G O $\sqsubset$
b 13. 2 hujus. G S; fiat arc G T = G S, & per T deſcribatur parallelus V T ſecans circulum M N in X: Jam circulus M N ſecans parallelum V X non per polos aufert ſegmentum, ab X per V ad alteram ſectionem, minus ſemicirculo; etiam, ſegmentum circuli M N ab X per N ad oppoſitam ſectionem eſt majus ſemicirculo. Item ſegmentum V X in-
c 15 1 huj. clinatur ad M X versùs partes R. (Nam circulus B E [c] rectus eſt circulo N Y per polum incidenti parallelorum; ergo B E inclinatur ad circulum M N, ergo V X ad eundem N M inclinatur); denique ſeg-
* Vid. Not. mentum paralleli X V, ab X per V ad alteram ſectionem, *ſecatur in-
d 2. 3 hujus. æqualiter in T: è quibus recta T X [d] minor eſt rectâ T F, [e] hoc eſt
e 3. 3 hujus. rectâ H S; unde, ſicut in 6tâ hujus, erit arcus I L major arcu L N.
Q. E. D.

Fig. 72. *Not.* Quòd ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem pro-
f 5 2 hujus, & conſt. tenſum, ſecetur inæqualiter in T, ita patebit. Ducatur circulus maximus E Z tangens parallelum A C in Z; & quoniam circulus maximus
g 9 2 huj. Z Y [f] tranſit per polos circulorum E Z, & B E, [g] biſecabit is horum

ſegmenta; ergo arcus E Z eſt quadrans; paríque de cauſa arcus E D eſt quadrans; ergo circulus polo E per Z deſcriptus tranſit per Y, & D.

Simili diſcurſu N M eſt quadrans, & circulus maximus polo N per M deſcriptus tranſibit per Y, [f] pérque polos tangentis N M; [g] ergo circulus M Y biſecabit ſegmenta tangentis N M, & circulorum E B, X Y; ergo ſecabit circulum E B ad intervallum quadrantis ex N; hoc eſt ultra quadrantem ex E, hoc eſt extra circulum D B. ergo ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem biſecatur extra V; & arcus X V minor eſt ſemiſſe iſtius ſegmenti, magíſque arcus T X eſt minor ejuſdem ſemiſſe.

Lemma Probl.

Propoſitis duabus inæqualibus magnitudinibus (A B, A C,) reperire aliam mediam, quæ datæ cuicunque magnitudini (D G) commenſurabilis ſit. Fig. 73.

Biſecetur D G, & ejus ſemiſſis biſecetur, ac ita continuò [a] donec a 1.10.
aliqua pars D F ſit minor quàm C B; & ſit E multiplex ipſius D F proximè major quàm A C; ergo E ⊐ A B: (nam ſi æqualis eſſet, poſſet detrahi una magnitudo æqualis ipſi D F, ſic ut ſupereſſet multiplex ipſius D F major quàm A C, contra conſtructionem), atqui E & D G commenſurabiles ſunt, [b] propter D F communem menſuram: b *conſtr.*
ergo liquet propoſitum.

Prop. I X.

Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (AB), Fig. 74.
quem duo alii maximi circuli B C, D C ad rectos angulos ſecent; quorum circulorum alter (B C) ſit unus parallelorum, alter verò (D C) ad parallelos obliquus ſit: hoc obliquo circulo ſumantur æquales circumferentiæ (E F, G H) quæ continuæ quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi illius paralleli: per polum autem (A) & ſingula puncta (E, F, G, H) æquales circumferentias terminantia deſcribantur maximi circuli (A E I, A F K, A G L, A H M): inæquales intercipient circumferentias; quarum ea (ML) quæ propior erit maximo circulo primùm poſito, ſemper erit major remotiore (KI.)

Sit primùm arcus intermedius F G commenſurabilis arcui E F, vel
G H; & [a] dividantur arcus E F, F G, G H in partes æquales com- a 4. 10.
muni menſuræ: pérque diviſionum puncta Q, P, N, & polum A
ducantur circuli maximi A Q V, A P T, A N R; ergo arc MR [b] ⊏ b *6.3. huj.*

R L[b] $\sqsubset$ L S, & ſic continuò; ergo arc M L $\sqsubset$ K I. *Q. E. D.*

Fig. 75. Sit ſecundò arc F G incommenſurabilis utrique arcui E F, F G; tum ſi arcus M L non ſit major arcu K I; ſit primo minor, & ſumatur K N æqualis ipſi M L; & ducatur circulus maximus A N ſecans circulum
c lem. 8.3.b. C D in O; tum [c] capiatur arcus F P major quàm F O, & minor quàm F E, ipſique F G commenſurabilis; & huic æqualis ſit G Q, ducantúrque maximi circuli A P R, A Q S. Hinc ob arcus P F, G Q æquales, & commenſurabiles intermedio F G, erit (ut modò oſtenſum eſt) arc S L $\sqsubset$ arc K R $\sqsubset$ arc K N. Ergo arc M L $\sqsubset$ arc K N:
d ſuppoſ. atqui arc M L [d] = arc K N, quæ repugnant.

Fig. 76. *Q*uòd ſi dicatur arcus M L æqualis arcui K I, biſecentur arcus E F, G H in N, O; ducantúrque maximi circuli A N P, A O Q; [e] ergo
e 6. 3 huj. arc M Q $\sqsubset$ arc Q L; [e] & arc K P $\sqsubset$ P I; unde *Q* L $\sqsupset$ $\frac{1}{2}$ M L ($\frac{1}{2}$ K I); & K P $\sqsubset$ $\frac{1}{2}$ K I. quare arc *Q* L $\sqsupset$ K P. atqui, cùm arc. G O = F N, non erit *Q* L $\sqsupset$ *Q* P, ut modò oſtenſum eſt; ergo malè ponitur arc M L æqualis arcui K I.

Igitur arcus M L non eſt minor arcu K I, nec æqualis ei; ergo major. *Q. E. D.*

Scholium.

Planè ſimili diſcurſu, quæ de arcubus continuis oſtenſa ſunt in propoſitionibus 5, 7, 8, etiam de non-continuis oſtendi poſſent. Valeant igitur.

Prop. X.

Fig. 77. Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli (B D, C D) ad angulos rectos ſecent; quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (C D) ſit obliquus ad parallelos: in hoc autem obliquo circulo (C D) ſumantur duo quælibet puncta (E, F) ad eaſdem partes maximi illius paralleli; pérque polum (A) parallelorum, & per utrumque illorum punctorum deſcribantur maximi circuli (A G, A H): erit ut circumferentia (B H) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò poſitum, & proximum maximum circulum per polum & per unum punctorum deſcriptum, ad circumferentiam (C F) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam; ita circumferentia (H G) maximi parallelorum intercepta inter duos maximos circulos per polum pérque utrumque punctorum deſcriptos ad circumferentiam aliquam, quæ ſit minor, quàm circumferentia (F E) obliqui circuli inter utrumque punctum intercepta.

Sint primùm arcus C F, F E commenſurabiles , & dividantur in arcus æquales communi menſuræ, pérque puncta diviſionum & polum A ducantur circuli maximi I M, K N, L O.

Quum igitur arcus C L, L K, K F, F I, I E æquentur ; ſitque
ideò arc B O [a]⊏ O N [a]⊏ N H, & ſic porro : [b] erit arc B O. C L a 6. 3 *hujus.*
⊏ O N. L K ⊏ N H. K F. [c] ergo compoſitè arc B O + O N + b 8. 5.
N H ad arc C L + L K + K F. ⊏ arc N H. K F ; hoc eſt arc B H. c 34. 5.
C F ⊏ arc N H. K F [b]⊏ H M. F I. verùm arc H M. F I ⊏ H G.
F E ([c] ob H M. F I ⊏ M G. I E) ergo arc B H. C F ⊏ arc H G.
F E. Sit arc B H. C F :: H G. P. quare H G. P ⊏ H G. F E. [d] er- d 10. 5.
go P ⊐ arc. F E. *Q.E.D.*

Quòd ſi arcus C F, F E ſint incommenſurabiles : ſit primò B H. Fig. 78.
C F :: H G. F I. & arcus F I major (ſi fieri poteſt) arcu F E : tum
inter F I. F E medius arcus F K [e] ſit ipſi C F commenſurabilis ; ac per e *lem.* 8. 3 *huj.*
polum A & K ducatur maximus circulus K L ; ergo è mox oſtenſis,
eſt B H. C F (hoc eſt H G. F I) ⊏ H L. F K. [f]⊏ H G. F K. [g] er- f 8. 5.
go F I ⊐ F K. *Q.E.A.* g 10. 5.

Sin dicatur arc B H. C F :: H G. F E ; biſecetur arcus F E in X, Fig. 79.
pérque polum A & X ducatur circulus maximus X Y ; [h] ergo arc H Y h 6. 3 *hujus.*
⊏ Y G ; adeóque H Y ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. [k] ergo H Y. F X ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. F X k 8. 5.
($\frac{1}{2}$ F E) :: H G. F E. ergo H Y. F X ⊏ B H. C F ; [l] unde H Y ad l 10. 5.
arcum majorem arcu F X ſe habebit ut B H ad C F ; quod fieri non poſſe modo demonſtratum eſt.

Igitur potiùs ut B H ad C F, ita erit H G ad arcum minorem ipſo F E. *Q. E. D.*

Coroll. arc. B H. C F ⊏ H G. F E. & permutatim.

Prop. XI.

Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli Fig. 80.
(A B) , quem duo alii maximi circuli (B C, D E) ad angulos rectos ſecent ; quorum alter (B C) ſit unus parallelorum, alter verò (D E) ſit obliquus ad parallelos, alius autem maximus circulus (A E) per polos parallelorum tranſiens obliquum circulum ſecet (in E) inter maximum parallelorum, & eum (D F) quem obliquus circulus (D E) tangit : diameter ſphæræ (D L) ad diametrum (D M) ejus circuli, quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò poſitum, & maximum circulum per polos paralle-

lorum tranſeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam.

Sint A G, B G, D L, D M communes ſectiones circuli A B cum circulis A C, B C, D E, D F; item C G, F N communes ſectiones circuli A E, cum circulis B C, D F. Ex polo A per E deſcribatur parallelus O E; ſintque O H, E H, E I communes ejus ſectiones cum circulis A B, A C, D E. Quoniam igitur A G [a] recta eſt plano
a 10. 1 *huj.* paralleli O E, caditque in ejus centrum, erit ang G H I rectus; [b] er-
b 19. 1. go I G ⊏ I H: Fiat I K = I H, & connectatur E K; ergo (cùm
c 19. 11. circulus uterque D E, O E rectus ſit circulo A B, ac [c] ideò commu-
d 4. 1. nis ipſorum ſectio E I recta plano A B; ideóque anguli E I H, E I K
e 15. 5. recti ſint, & latera E I, I H æquentur lateribus E I, I K) [d] erunt an-
f 4. 6. g 7. 5. guli I H E I K E æquales. Jam D L. D M [e] :: D G. D N :: I G. I H
* *Vid. Not.* h *priùs.* [g] :: I G. I K* ⊏ ang I K E ([h] hoc eſt ang. I H E, [k] vel B G C).
k 10. 11. I G E. Eſt verò ang B G C. ang I G E (vel D G E) [l] :: arc B C.
l 33. 6. D E. ergo D L. D M ⊏ arc B C. D E. *Q. E. D.*

Fig. 81. *Not.* Quòd I G. I K ⊏ ang I K E. I G E, ſic patet.

Ducatur G X ad K E parallela, cui occurrat I E protracta in X. centróque G per E ducatur arcus circuli Z E Y, ipſis G I (protractæ)
m 1. 6. & G X occurrens punctis Z. Y. Eſtque X E. E I [m] :: triang X G E.
n 8. 5. triang E G I [n] ⊏ ſector Y G E. triang E G I [n] ⊏ ſector Y G E.
o 33. 6. Sector E G Z [o] :: ang X G E. ang E G I. [p] ergo componendo X I.
p 28. 5. E I ⊏ ang X G I. ang E G I. [q] hoc eſt G I. K I ⊏ ang E K I. ang.
q 4. 6. E G I. *Q. E. D.*

Scholium.

Iiſdem poſitis, diameter ſphæræ ad diametrum paralleli (G E) per punctum (E) obliqui circuli, per quod maximus circulus (A C) è polo tranſit, deſcripti, minorem rationem habet, quàm circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò poſitum, & maximum circulum per polos parallelorum tranſeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam.

a 13. 1 *huj.* Nam quoniam uterque circulus B C, D E tranſit [a] per polos circuli
A B, erit iſtorum interſectio Q polus circuli A B; ergo ſegmentum
b 3 *ſch.* 21. 2 *h* D E L (rectò inſiſtens circulo A B) dividitur inæqualiter in E; [b] er-
go ducta recta E D minor eſt ductâ E O; ergo (cùm circulus E O
c 8. 5. minor ſit circulo E D) erit arcus E O major arcu E D; [c] ergo arc
B C. E O ⊐ B C. E D; ergo tota peripheria circuli B C ad totam periph. circuli E O (hoc eſt diameter B R ad diametrum O D) minorem rationem habet quàm B C ad E D. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XII.

Si in ſphæra maximi circuli (A B, C D) tangant unum eundémque parallelorum (A C), intercipiántque ſimiles parallelorum circumferentias (P K, B D) inter utrumque maximorum circulorum interjectas; alius autem maximus circulus (E F) ad parallelos obliquus circulos tangat majores (B G) illis, quos tangunt maximi circuli primò poſiti; ſecétque obliquus idem circulus eoſdem maximos circulos primò poſitos in punctis (I, K) poſitis inter maximum parallelorum, & circulum quem tangunt circuli maximi primò poſiti: diameter ſphæræ ad diametrum circuli (E G), quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B D) maximi paralleli (H F) intercepta inter circulos (A B, C D) primò poſitos, eundémque circulum tangentes, ad circumferentiam (I K) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam. Fig. 82.

Per L polum parallelorum & puncta E, I, K deſcribantur maximi circuli L H, L M, L N; & per K parallelus K O ſecans A B in P: quum igitur [a]ſit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major quàm ratio arcûs H M ad E I, [b] & hæc major ratione arcûs M N ad I K; ſitque arcus B D minor arcu M N (nam arcus P K, [c]ſimilis arcui B D, minor eſt arcu O K, [d] qui ſimilis eſt arcui M N); [e] erit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major ratione arcûs B D ad arcum I K. *Q. E. D.*

[a] 11. 3. *hujus.*
[b] *cor.* 10. 3. *h.*
[c] *hyp.*
[d] 10. 2 *hujus.*
[e] 8. 5.

Prop. XIII.

Si in ſphæra paralleli circuli (C D, E F) intercipiant circumferentias (G C, G F) maximi alicujus circuli (A F) utrinque æquales ab illo puncto (G) in quo ipſe maximus circulus (A F) ſecat maximum parallelorum (B G); per puncta verò (C, F) terminantia æquales circumferentias, & per parallelorum polos deſcribantur maximi circuli; aut ſi deſcribantur maximi circuli, qui unum eundémque parallelorum tangant, æquales intercipient circumferentias (G H, G I) de maximo parallelorum. Fig. 83. 84.

Ob arcus G C, G F pares, [a]erunt paralleli C D, E F pares. [b] ergo arcus G K, G L æquantur; [c]ergo ductæ ſubtenſæ C K, F L æquales erunt; [d] unde arcus C K, F L æquantur; ergo, quum arcus G H [e]ſimilis ſit arcui C K. [e] & arcus G I arcui F L, erunt arcus G H, G I ſimiles, & proinde æquales. *Q.E.D.*

[a] 17. 2 *huj.*
[b] 18. 2 *huj.*
[c] 3. 3 *huj.*
[d] 28. 3.
[e] 10, *vel* 13. *Coroll.* 2. *huj.*

Digitized by Google

Coroll. Hinc arcus C H, H E, & ſimiliter intercepti æquales ſunt. Nam rectæ C H, H E æquantur.

Prop. XIV.

Si in ſphæra maximus circulus (A B) aliquem circulum (A C) tangat; alius autem maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos (D F) majores illis, quos tangebat maximus circulus (A B) primò poſitus; inæquales intercipient circumferentias (K H, E I) parallelorum circulorum, quorum propiores (K H, vel B E) utrivis polorum majores erunt, quàm ut ſimiles ſint remotioribus (E I, vel G K).

a 15. 2 *huj.* Per puncta E, K [a] deſcribantur maximi circuli L E, C K tangentes
b 13. 2 *huj.* circulum A C in C, & L: [b] ergo arcus M H, E I ſimiles ſunt; quare K H major eſt, quàm ut ſimilis ſit arcui E I; paritérque ſimiles ſunt arcus B N, G K, ergo B E (propior alteri polo) major eſt quàm ut ſimilis ſit arcui G K. unde liquet propoſitum.

FINIS.

Digitized by Google